OPERADORES MAXIMAIS DOS TIPOS DIÁDICO E NÃO-DIÁDICO E PESOS SOBRE A ESFERA S^2

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. Iara Andréa Alvares Fernandes e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 18 de fevereiro de 1997

Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni
Orientador

Prof. Dr. Benjamin Bordin
Co-orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 18 de fevereiro de 1997

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). DICESAR LASS FERNANDEZ

Prof (a). Dr (a). IVAM RESINA

Prof (a). Dr (a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Meu profundo reconhecimento

Ao Professor
Doutor Sérgio Antonio Tozoni, pela dedicação, paciência, amizade e competência na orientação deste trabalho;

Ao Professor
Doutor Benjamin Bordin, co-orientador deste trabalho, pelo constante incentivo e pelos valiosos momentos de discussão e esclarecimento;

Ao CNPq,
pelo apoio financeiro;

À Professora
Mirtes Abdelnur, que me mostrou novos horizontes com sua sabedoria e com quem aprendi o quanto o conhecimento é uma arma poderosa para enfrentar a vida;

Aos meus familiares,
pelo constante incentivo por terem me propiciado as condições necessárias para que este trabalho fosse realizado;

Ao Renato,
pelo carinho, compreensão e companherismo, durante todos os momentos em que necessitei;

A Deus,
pela vida e por me dar sempre o suporte necessário para continuar.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é desenvolver sobre a esfera S^2 uma teoria de operadores maximais, pesos e espaço BMO, do tipo diádico, isto é, definidos a partir de decomposições da esfera S^2, que introduzimos no Capítulo I.

Utilizando um processo de transferência introduzido por Bordin e Tozoni em [1], obtivemos, a partir de resultados para pesos e operadores de tipo diádico sobre S^2, a limitação do operador maximal de Hardy-Littlewood sobre $L^p_w(S^2)$, a desigualdade de Fefferman-Stein e a limitação do operador maximal que controla a integral de Poisson, com pesos w na classe de Muckenhoupt.

No Capítulo I fizemos decomposições da esfera unitária S^2, análogas às decomposições diádicas de S^2, que têm algumas propriedades tão boas quanto as decomposições diádicas de $\mathbb{R}^n$, no sentido de podermos comparar as medidas de elementos de um k-ésimo estágio e de um $(k+1)$-estágio da decomposição, e também no sentido de podermos comparar elementos das decomposições com bolas de S^2. Este capítulo traz resultados demonstrados por Bordin e Tozoni em [1] para a esfera S^n, no caso particular $n = 2$, os quais são essenciais para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

No Capítulo II utilizamos o método conhecido como a "*decomposição de Calderón-Zygmund*" para obter estimativas para o operador maximal M_d, definido usando as decomposições de S^2 introduzidas no Capítulo I. Também obtivemos um resultado do tipo do Teorema da Diferenciação de Lebesgue. Estes resultados são conhecidos na Teoria dos Martingais, mas a técnica aqui utilizada foi a mesma usada por Garcia-Cuerva e Rubio de Francia em [10] para obter estimativas para o operador maximal de Hardy-Littlewood.

No Capítulo III definimos e estudamos os pesos da classe $A_p(\mathcal{A})$, bem como as suas relações com os pesos da classe de Muckenhoupt $A_p(S^2)$. A classe $A_p(\mathcal{A})$ é definida de maneira análoga à classe A_p (diádica) de pesos sobre S^1, usando as decomposições de S^2 construídas no Capítulo I. Os pesos da classe $A_p(\mathcal{A})$ podem ser vistos como pesos para martingais e, desta forma, os resultados sobre pesos da classe $A_p(\mathcal{A})$, demonstrados neste capítulo, já são conhecidos na Teoria dos Martingais. Em nossas demonstrações fizemos uso das idéias contidas nas demonstrações de resultados análogos para pesos da classe de Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^n)$, que podem ser encontrados em Garcia-Cuerva e Rubio de Francia [10]. Os resultados principais do capítulo são as caracterizações dos pesos das classes $A_p(\mathcal{A})$ e $A_\infty(\mathcal{A})$, dadas em 2.3 e 2.10, e a demonstração da limitação do operador de Hardy-Littlewood sobre $L^p_w(S^2)$, que utiliza o fato de o operador M_d ser limitado sobre $L^p_w(S^2)$. A técnica usada na demonstração deste resultado foi usada por Bordin e Tozoni em [1].

O objetivo do Capítulo IV é definir e obter propriedades sobre os espaços BMO, diádico e não-diádico sobre a esfera unitária S^2. O principal resultado deste capítulo é a desigualdade de Fefferman-Stein com pesos da classe de Muckenhoupt $A_q(S^2)$, entre o operador maximal de Hardy-Littlewood e o operador maximal sharp, cuja demonstração é obtida a partir da desigualdade de mesmo nome para operadores do tipo diádico, a qual é demonstrada utilizando a decomposição de Calderón-Zygmund introduzida no Capítulo II. Outro importante resultado deste capítulo, envolvendo os espaços BMO, que foi obtido como aplicação da desigualdade de Fefferman-Stein, é um teorema do tipo Marcinkiewicz-Riviere para operadores lineares definidos em $L^\infty_w(S^2)$, que é de grande importância para o estudo de operadores integrais singulares. O espaço BMO diádico sobre S^2 é análogo ao espaço BMO diádico sobre S^1, estudado em Schipp-Wade-Simon [17]. Estes espaços são estudados na Teoria dos Martingais em Garsia [11].

Finalmente, no Capítulo V, apresentamos os resultados obtidos por Bordin e Tozoni em [2] para a esfera S^n, no caso particular $n = 2$. Definimos novos operadores maximais $\mathcal{M}_d$ (de tipo diádico) e $\mathcal{M}$ e obtivemos condições necessárias e suficientes sobre um peso w e uma medida μ, definida sobre os borelianos de $\widetilde{S^2} = S^2 \times [0,1]$, para que estes operadores sejam limitados de $L^p_w(S^2)$ em $L^p(\widetilde{S^2}, \mu)$. No caso do operador não-diádico $\mathcal{M}$, se $w \equiv 1$, a condição obtida é a condição de Carleson para a esfera unitária S^2. Ainda neste capítulo, dada uma função real e integrável f sobre S^2, definimos o núcleo de Poisson e a integral de Poisson u_f e obtivemos uma condição suficiente (que também é necessária para o caso $w \equiv 1$) para que o operador $f \mapsto u_f$ seja limitado de $L^p_w(S^2)$ em $L^p(\mathbb{B}, \mu)$, onde $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R}^3 : | y |_3 < 1\}$.

CAPÍTULO I

UMA DECOMPOSIÇÃO DE S^2

O objetivo deste capítulo é construir uma decomposição da esfera unitária S^2, análoga às decomposições diádicas de S^1. Esta decomposição foi introduzida por Bordin e Tozoni em [1], no caso geral da esfera unitária S^n. Os resultados obtidos aqui serão essenciais para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

Na primeira seção somente fixamos algumas notações e apresentamos algumas definições e propriedades básicas da esfera S^2.

Na segunda seção fazemos decomposições de S^2, as quais chamamos de decomposições de tipo diádica. O resultado principal desta seção e do capítulo é o Teorema 2.11, o qual nos dá informações importantes sobre a decomposição obtida, estabelecendo, por exemplo, o comportamento das medidas dos elementos da decomposição de um k-ésimo estágio em relação a de um $(k+1)$-estágio. Para demonstrá-lo utilizamos alguns resultados técnicos que são colocados como lemas.

1. PROPRIEDADES BÁSICAS DE S^2

1.1. NOTAÇÃO. Se $x \in \mathbb{R}^n, n \in \{2,3\}$, escrevemos $| x |_n = (x \cdot x)^{1/2}$ onde $x \cdot y$ é o produto escalar usual entre x e y em $\mathbb{R}^n$.

1.2. NOTAÇÃO. Sejam S^1 o círculo unitário em $\mathbb{R}^2$, e $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : | x |_3 = 1\}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. Se $x \in S^n, n \in \{1,2\}$ e $\ell > 0$, denotamos por $B_n'(x,\ell)$ a intersecção de S^n com a bola fechada em $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro x e raio ℓ.

1.3. DEFINIÇÃO. Sejam $\mathcal{D}_1 = [0, 2\pi]$ e $\mathcal{D}_2 = [0,\pi] \times [0, 2\pi]$. Definimos as aplicações $\xi_1 : \mathcal{D}_1 \to S^1$ e $\xi_2 : \mathcal{D}_2 \to S^2$ por

$$\begin{aligned}\xi_1(\theta_1) &= (cos\theta_1, sen\theta_1),\\ \xi_2(\theta_1,\theta_2) &= (cos\theta_1, sen\theta_1 cos\theta_2, sen\theta_1 sen\theta_2).\end{aligned}$$

1.4. OBSERVAÇÃO. $\xi_2(\theta_1,\theta_2) = (cos\theta_1, sen\theta_1\ \xi_1(\theta_2))$.

1.5. NOTAÇÃO. A medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $A \subset S^2$ será denotada por $\sigma(A)$. Se G é um subconjunto mensurável de $\mathcal{D}_2$,

$$\sigma(\xi_n(G)) = \int_G sen^{n-1}\theta_1 d\theta,$$

onde $d\theta = d\theta_1$, se $n = 1$ e $d\theta = d\theta_1 d\theta_2$, se $n = 2$. Se f é uma função real e integrável definida em S^2, então

$$\int_{S^2} f(x)d\sigma(x) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\xi_2(\theta)) sen\theta_1 d\theta_2 d\theta_1,$$

onde $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

1.6. DEFINIÇÃO. Seja μ uma medida sobre a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{S^2}$ de S^2. Dizemos que μ é uma medida de Radon sobre S^2 se as seguintes condições estão satisfeitas:

(i) $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset S^2$;

(ii) Para qualquer $E \in \mathcal{B}_{S^2}$,

$$\mu(E) = sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\};$$

(iii) Para qualquer $E \in \mathcal{B}_{S^2}$,

$$\mu(E) = inf\{\mu(G) : E \subset G, G \text{ aberto}\}.$$

1.7. DEFINIÇÃO. Um grupo G é um grupo topológico se está munido de uma topologia tal que as operações de grupo

$$(x, y) \in G \times G \mapsto x \cdot y \in G$$

e

$$x \in G \mapsto x^{-1} \in G$$

são contínuas.

1.8. DEFINIÇÃO. Uma medida de Haar à esquerda sobre um grupo topológico localmente compacto G é uma medida de Radon μ, não nula sobre G, que satisfaz $\mu(xE) = \mu(E)$, para todo $x \in E$ e todo $E \in \mathcal{B}_{S^2}$, onde $xE = \{x \cdot y : y \in E\}$. Esta propriedade é chamada invariância por translação à esquerda de μ.

1.9. NOTAÇÃO. Denotaremos por $SO(3)$ o grupo das rotações próprias de $\mathbb{R}^3$. O grupo $SO(3)$ pode ser identificado com o grupo das matrizes inversíveis de ordem 3×3 e com determinante 1, que é um grupo topológico com a operação de multiplicação usual de matrizes. Este grupo age transitivamente sobre a esfera S^2, isto é, para quaisquer $x, y \in S^2$, existe $u \in SO(3)$ tal que $u(x) = y$. Esta propriedade é fundamental para a obtenção de alguns resultados deste capítulo.

2. UMA DECOMPOSIÇÃO DE S^2 DE TIPO DIÁDICO

Seja k um inteiro não negativo, e consideremos o intervalo diádico

$$I_j^k = [(j-1)2^{-k+1}\pi, \quad j2^{-k+1}\pi], \quad 1 \le j \le 2^k.$$

Dessa forma, o intervalo $[0, 2\pi]$ pode ser dividido em 2^k intervalos I_j^k, cada qual de comprimento $2^{-k+1}\pi$.

2.1. DEFINIÇÃO. Definimos

$$\mathcal{G}_0^2 = \{\mathcal{D}_2\}, \quad \mathcal{G}_1^2 = \{[0, \pi] \times [0, \pi], \quad [0, \pi] \times [\pi, 2\pi]\}$$

e, para $k \ge 2$, definimos

$$\mathcal{G}_k^2 = \{I_j^k \times I_\ell^r, \quad I_{2^{k-1}-j+1}^k \times I_\ell^r\}$$

onde

$$\begin{cases} r = 2 \Rightarrow j = 1 \quad \text{e} \quad 1 \le \ell \le 4 \\ 3 \le r \le k \Rightarrow 2^{r-3} + 1 \le j \le 2^{r-2} \quad \text{e} \quad 1 \le \ell \le 2^r. \end{cases}$$

Agora, para $k \ge 0$, definimos

$$\mathcal{A}_k = \{\xi_2(G) : G \in \mathcal{G}_k^2\}$$

e

$$\mathcal{A}_k^1 = \{\xi_1(I_j^k) : 1 \leq j \leq 2^k\}.$$

Definimos, também, $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k$.

2.2. OBSERVAÇÃO. Consideremos os elementos $Q_1 = \xi_2(I_j^k \times I_r^l)$ e $Q_2 = \xi_2(I_{2^{k-1}-j+1} \times I_i^r)$ de $\mathcal{A}_k$. Então existe $u \in SO(3)$ tal que $u(Q_1) = Q_2$. Como conseqüência desta observação será suficiente considerarmos os elementos do tipo Q_1 nas demonstrações e também em alguns enunciados dos resultados deste capítulo.

2.3. OBSERVAÇÃO. Observemos que, para $k \geq 0$, $\mathcal{A}_k$ é uma cobertura de S^2 e, se $Q_1, Q_2 \in \mathcal{A}_k, Q_1 \neq Q_2$, então, $\sigma(Q_1 \cap Q_2) = 0$.

2.4. OBSERVAÇÃO. Se $\#F$ denota o número de elementos de um conjunto finito F, então temos que

$$\#\mathcal{A}_0 = 1, \quad \#\mathcal{A}_1 = 2, \quad \#\mathcal{A}_2 = 8$$

e, para $k \geq 3$,

$$\#\mathcal{A}_k = 2^3 + \sum_{r=3}^{k} 2^{2r-2} = \frac{2^3 + 2^k}{3}.$$

2.5. LEMA (a). Sejam $k \geq 1$, $Q_1 = \xi_2(G_1) \in \mathcal{A}_k$, $Q_2 = \xi_2(G_2) \in \mathcal{A}_{k+1}$ tal que $Q_2 \subset Q_1$. Se $G_1 = I_1^1 \times I_\ell^1, \ell \in \{1, 2\}$, então $G_2 = I_i^2 \times I_n^2$, com $i \in \{1, 2\}$ e $1 \leq n \leq 4$. Se $k \geq 2$ e $G_1 = I_j^k \times I_\ell^r$, com $2 \leq r \leq k$ e $1 \leq \ell \leq 2^r$, então $G_2 = I_i^{k+1} \times I_n^s$, com $i \in \{2j-1, 2j\}$ e $1 \leq n \leq 2^s$, onde $s \in \{2, 3\}$ quando $j = 1$, e $s = r + 1$ quando $2 \leq j \leq 2^{k-2}$.

(b) Seja $k \geq 0$ e $Q \in \mathcal{A}_k$. Se $k = 0$, então Q é a união de dois elementos de $\mathcal{A}_1$ e, se $k = 1$, então Q é a união de quatro elementos de $\mathcal{A}_2$. Para $k \geq 2$ temos que $Q = \xi_2(I_j^k \times I_\ell^r)$ é a união de exatamente três elementos de $\mathcal{A}_{k+1}$, se $j = 1$, e é a união de exatamente quatro elementos de $\mathcal{A}_{k+1}$, se $2 \leq j \leq 2^{k-2}$.

DEMONSTRAÇÃO. (a): Vamos supor inicialmente $k = 1$. Se $Q_1 = \xi_2(G_1) \in \mathcal{A}_1$ e $Q_2 = \xi_2(G_2) \in \mathcal{A}_2$ com $Q_2 \subset Q_1$, temos que $G_1 = [0, \pi] \times [0, \pi]$ ou $G_1 =$

$[0,\pi]\times[\pi,2\pi]$. Como $Q_2 \subset Q_1$, devemos ter $G_2 \subset G_1$. Portanto, se $G_1 = [0,\pi]\times[0,\pi]$, temos que $G_2 \in \{I_1^2 \times I_\ell^2,\ \ I_2^2 \times I_\ell^2\}, \ell \in \{1,2\}$ e, se $G_1 = [0,\pi] \times [\pi, 2\pi]$, temos que $G_2 \in \{I_1^2 \times I_\ell^2,\ \ I_2^2 \times I_\ell^2\}, \ell \in \{3,4\}$. Logo, $G_2 = I_i^2 \times I_\ell^2$, com $i \in \{1,2\}$ e $1 \leq \ell \leq 4$.

Consideremos, agora, $k \geq 2$. Sejam $G_1 = I_j^k \times I_\ell^r,\ \ G_2 = I_i^{k+1} \times I_n^s$, com $2 \leq r \leq k,\ 1 \leq \ell \leq 2^r$, tais que $Q_2 = \xi_2(G_2) \subset Q_1 = \xi_2(G_1)$. Queremos mostrar que $i \in \{2j-1, 2j\}, s \in \{2,3\}$, se $j = 1$ e $s = r+1$, se $2 \leq j \leq 2^{k-2}$. Observemos que $I_j^k = I_{2j-1}^{k+1} \cup I_{2j}^{k+1}$. Portanto, como $G_2 \subset G_1$, segue que $i \in \{2j-1, 2j\}$ e $I_n^s \subset I_r^\ell$. Se $r = 2$, temos que $j = 1$ e, conseqüentemente, $i \in \{1,2\}$ e $s \in \{2,3\}$. Se $r \geq 3$, então $2^{r-2}+1 \leq i \leq 2^{r-1}$. De fato, temos que $2^{r-3}+1 \leq j \leq 2^{r-2}$ e assim $2^{r-2}+2 \leq 2j \leq 2^{r-1}$ e $\ 2^{r-2}+1 \leq 2j-1 \leq 2^{r-1}-1$. Como $i \in \{2j-1, 2j\}$, temos que $2^{r-2}+1 \leq i \leq 2^{r-1}$. Podemos então concluir que $s = r+1$ e assim demonstramos (a).

(b): Se $k = 0$ ou $k = 1$, o resultado é trivial. Vamos supor $k \geq 2$. Sejam $Q_1 = \xi_2(I_j^k \times I_\ell^r) \in \mathcal{A}_k,\ \ Q_2 = \xi_2(I_i^{k+1} \times I_n^s) \in \mathcal{A}_{k+1}$, com $2 \leq r \leq k,\ \ 1 \leq \ell \leq 2^r,\ \ 2 \leq s \leq k+1,\ \ 1 \leq n \leq 2^s$, e suponhamos $Q_2 \subset Q_1$.

Se $j = 1$, segue por (a) que $i \in \{1,2\}$. Quando $i = 1$, temos que $r = s = 2$, $\ell = n$ e assim $Q_2 = \xi_2(I_1^{k+1} \times I_\ell^2)$. Quando $i = 2$, temos que $s = 3$, $n \in \{2\ell, 2\ell+1\}$ e assim $Q_2 = \xi_2(I_2^{k+1} \times I_{2\ell}^3)$ ou $Q_2 = \xi_2(I_2^{k+1} \times I_{2\ell+1}^3)$. Logo, Q_1 é a união de exatamente três elementos do tipo Q_2.

Se $j \geq 2$, segue por (a) que $i \in \{2j-1, 2j\}$ e $s = r+1$. Agora, $I_j^k = I_{2j-1}^{k+1} \cup I_{2j}^{k+1}$. Portanto, temos que Q_1 é união dos elementos $\xi_2(I_i^{k+1} \times I_n^{r+1})$ para $i \in \{2j-1, 2j\},\ \ n \in \{2\ell, 2\ell+1\}$. Logo, Q_1 é a união de exatamente quatro elementos do tipo Q_2, e assim demonstramos (b).

2.6. LEMA. Seja $\varepsilon_r = 2^{-r}\pi$. Se $Q' \in \mathcal{A}_r^1$, então existe $x' \in Q'$ tal que $Q' \subset B_1'(x', \varepsilon_r)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $Q' \in \mathcal{A}_r^1$ e seja $1 \leq j \leq 2^r$ tal que $Q' = \xi_1(I_j^r) = \{(cos\theta, sen\theta) : (j-1)2^{-r+1}\pi \leq \theta \leq j2^{-r+1}\pi\}$. Tomamos $x' = (cos\phi, sen\phi)$, onde $\phi = (2j-1)2^{-r}\pi$. O comprimento de Q' é dado por

$$\int_{(j-1)2^{-r+1}\pi}^{j2^{-r+1}\pi} \mid \xi_1'(\theta) \mid_2 d\theta = \int_{(j-1)2^{-r+1}\pi}^{j2^{-r+1}\pi} \mid (-sen\theta, cos\theta) \mid_2 d\theta = \int_{(j-1)2^{-r+1}\pi}^{j2^{-r+1}\pi} d\theta = 2^{-r+1}\pi.$$

Portanto, se $q = \xi_1(\theta) \in Q'$, temos que

$$\begin{aligned} |\, q - x' \,|_2 &= |\, (cos\theta, sen\theta) - (cos\phi, sen\phi) \,|_2 \\ &\leq |\, (cos j 2^{-r+1}\pi, sen j 2^{-r+1}\pi) - (cos\phi, sen\phi) \,|_2 \\ &= \frac{2^{-r+1}\pi}{2} = 2^{-r}\pi = \varepsilon_r. \end{aligned}$$

Como $q \in Q'$ é arbitrário, temos que $Q' \subset B_1'(x', \varepsilon_r)$.

2.7. LEMA. Sejam $k \geq 0$ e $\delta_k = (1 + 2^{-2}\pi)2^{-k+1}\pi$. Se $Q \in \mathcal{A}_k$, então existe $x \in Q$ tal que $Q \subset B_2'(x, \delta_k)$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $Q \in \mathcal{A}_0$, então $Q = S^2 = B_2'(x, \delta_0)$, para qualquer $x \in S^2$, pois $\delta_0 = (1 + \pi/4)2\pi$ é maior que o diâmetro de S^2. Se $Q \in \mathcal{A}_1$, então Q é uma metade da esfera S^2. Portanto, como $\delta_1 = 1 + \frac{\pi}{4} > \sqrt{2}$, existe $x \in Q$ tal que $Q \subset B_2'(x, \delta_1)$.

Suponhamos agora $k \geq 2$. Seja $Q = \xi_2(G) \in \mathcal{A}_k$, onde $G = I_j^k \times I_\ell^r$, $j = 1$ e $1 \leq \ell \leq 4$ se $r = 2$, $2^{r-3} + 1 \leq j \leq 2^{r-2}$ e $1 \leq \ell \leq 2^r$ se $3 \leq r \leq k$. Sejam $\phi = j2^{-k+1}\pi$, $t = 2^{-k+1}\pi$ e $\alpha = 2^{-r+1}\pi$. Se $j = 2^{r-3} + i$, então $1 \leq i \leq 2^{r-3}$ e

$$\frac{\pi t}{4\alpha} + it = \frac{\pi 2^{-k+1}\pi}{4.2^{-r+1}\pi} + (j - 2^{r-3})2^{-k+1}\pi = j2^{-k+1}\pi = \phi.$$

Temos que

$$Q = \{(cos\theta_1, sen\theta_1\ \xi_1(\theta_2)) : \phi - t \leq \theta_1 \leq \phi,\ \ \theta_2 \in I_\ell^r\}.$$

Quanto maior for o j, maior será a área de Q. Tomando $i = 2^{r-3}$, obtemos $j = 2^{r-2}$, que é o maior valor que j pode assumir. Logo, para $i = 2^{r-3}$, conseguimos Q com a maior área possível. Portanto, é suficiente tomar $i = 2^{r-3}$ e, neste caso, obtemos

$$\phi = \frac{\pi t}{4\alpha} + it = t\left[\frac{\pi}{4\alpha} + \frac{2^{r-1}\alpha}{4\alpha}\right] = \frac{\pi t}{2\alpha}.$$

Seja $Q' = \xi_1(I_\ell^r)$. Como $Q' \in \mathcal{A}_r^1$, pelo Lema 2.6 existe $x' \in Q'$ tal que $Q' \subset B_1'(x', \varepsilon_r)$. Se $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in G = I_j^k \times I_\ell^r$, então $x = (cos\phi, sen\phi\ x')$, $\xi_2(\phi, \theta_2) = (cos\phi, sen\phi\ \xi_1(\theta_2))$ e $\xi_2(\theta_1, \theta_2) = (cos\theta_1, sen\theta_1\ \xi_1(\theta_2))$ estão em Q e

$$
\begin{aligned}
| \xi_2(\theta_1,\theta_2) - \xi_2(\phi,\theta_2) |_3 &= ((cos\phi - cos\theta_1)^2 + (sen\phi - sen\theta_1)^2 \mid \xi_1(\theta_2) |_2^2)^{1/2} \\
&= | \xi_1(\phi) - \xi_1(\theta_1) |_2 \leq 2^{-k+1}\pi = t,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
| \xi_2(\phi,\theta_2) - x |_3 &= | (cos\phi, sen\phi\ \xi_1(\theta_2)) - (cos\phi, sen\phi\ x') |_3 \\
&= | sen\phi || \xi_1(\theta_2) - x' |_2 \leq \phi\varepsilon_r.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
| \xi_2(\theta_1,\theta_2) - x |_3 &\leq | \xi_2(\theta_1,\theta_2) - \xi_2(\phi,\theta_2) |_3 + | \xi_2(\phi,\theta_2) - x |_3 \\
&\leq t + \phi\varepsilon_r = \delta_k.
\end{aligned}
$$

Então, $\xi_2(\theta) \subset B_2'(x,\delta_k)$, para todo $\theta \in G$, isto é, $Q \subset B_2'(x,\delta_k)$.

2.8. OBSERVAÇÃO. Sejam $k \geq 0$, $I_1^k \in \mathcal{G}_k^1$, $Q_k' = \xi_1(I_1^k), \beta_k = 2^{-k}\pi$, $y_k = \xi_1(\beta_k)$ e $r_k = (2 - 2cos2^{-k}\pi)^{1/2}$. Então $B_1'(y_k, r_k) = Q_k'$. De fato, $\xi_1(\beta_k)$ é o ponto médio do segmento circular $\xi_1(I_1^k)$ de S^1. Logo $\xi_1(I_1^k)$ é do tipo $B_1'(\beta_k, r_k)$, onde

$$
\begin{aligned}
r_k &= | \xi_1(\beta_k) - \xi_1(0) |_2 \\
&= | (cos2^{-k}\pi, sen2^{-k}\pi) - (1,0) |_2 \\
&= (2 - 2cos2^{-k}\pi)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

2.9. LEMA. Sejam $k \geq 2$, $G_k = I_{2^{k-2}}^k \times I_1^k \in \mathcal{G}_k^2$, $Q_k = \xi_2(G_k)$, $\alpha_k = (\alpha_k^1, \alpha_k^2) = (\pi/2 - 2^{-k}\pi, 2^{-k}\pi) \in \mathcal{D}_2$, $x_k = \xi_2(\alpha_k)$ e $\rho_k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(2 - 2cos2^{-k}\pi)^{1/2}$. Então $B_2'(x_k, \rho_k) \subset Q_k$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $y = \xi_2(\theta_1,\theta_2) \notin Q_k$. Então, ou $\theta_1 \notin I_{2^{k-2}}^k$, ou $\theta_2 \notin I_1^k$. Se $\theta_1 \notin I_{2^{k-2}}^k$, então, por um raciocínio inteiramente análogo ao da Observação 2.8, obtemos que

$$
\begin{aligned}
(1)\quad | y - x_k |_3 &= | \xi_2(\theta_1,\theta_2) - \xi_2(\alpha_k^1,\alpha_k^2) |_3 \\
&= | (cos\theta_1, sen\theta_1\ \xi_1(\theta_2)) - (cos\alpha_k^1, sen\alpha_k^1\ \xi_1(\alpha_k^2)) |_3 \\
&\geq ((cos\theta_1 - cos\alpha_k^1)^2 + (sen\theta_1 \mid \xi_1(\theta_2) |_2 - sen\alpha_k^1 \mid \xi_1(\alpha_k^2) |_2)^2)^{1/2} \\
&= | \xi_1(\theta_1) - \xi_1(\alpha_k^1) |_2 \\
&> (2 - 2cos2^{-k}\pi)^{1/2} \\
&> \frac{\sqrt{2}}{2}(2 - 2cos2^{-k}\pi)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Agora, consideremos $\theta_1 \in I^k_{2^k-2}$. Como $y \notin Q_k$, temos que $\theta_2 \notin I^k_1$ e, portanto, $\xi_1(\theta_2) \notin Q'_k = \xi_1(I^k_1)$. Mas $\theta_1 \in I^k_{2^k-2}$ e, assim, ou $\alpha^1_k \leq \theta_1 \leq \pi/2$, ou $\pi/2 - 2^{-k+1}\pi \leq \theta_1 \leq \alpha^1_k$. Se $\alpha^1_k \leq \theta_1 \leq \pi/2$ e $\beta_k = 2^{-k}\pi$, tomamos $v_1 = sen\alpha^1_k \ \ \xi_1(\beta_k)$, $v_2 = sen\alpha^1_k \ \ \xi_1(\theta_2)$ e $\beta = (sen\theta^k_1 - sen\alpha^1_k)/sen\alpha^1_k$. Como $k \geq 2$, temos $0 < \alpha^1_k \leq \theta_1 \leq \pi/2$. Portanto, $sen\theta_1 \geq sen\alpha^1_k > 0$ e assim $\beta \geq 0$. Ainda, como $| \xi_1(\beta_k) |_2 = 1 = | \xi_1(\theta_2) |_2$, temos que $| v_1 |_2 = | v_2 |_2$ e, portanto,

$$| \beta v_2 + (v_2 - v_1) |_2 \ \geq \ | v_2 - v_1 |_2 \, .$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(2) \quad | \beta v_2 - (v_2 - v_1) |^2_2 \ &= \ \beta^2 | v_2 |^2_2 + 2\beta | v_2 |^2_2 - 2\beta(v_2 \cdot v_1) + | v_2 - v_1 |^2_2 \\
&\geq \ \beta^2 | v_2 |^2_2 + 2\beta | v_2 |^2_2 - 2\beta | v_2 |_2 | v_1 |_2 + | v_2 - v_1 |^2_2 \\
&= \ \beta^2 | v_2 |^2_2 + 2\beta | v_2 |^2_2 - 2\beta | v_2 |^2_2 + | v_2 - v_1 |^2_2 \\
&\geq \ | v_2 - v_1 |^2_2 \, .
\end{aligned}$$

Segue por (2) que

$$\begin{aligned}
(3) \qquad | y - x_k |_3 \ &= \ | (cos\theta_1, sen\theta_1 \ \xi_1(\theta_2)) - (cos\alpha^1_k, sen\alpha^1_k \ \xi_1(\alpha^2_k)) |_3 \\
&\geq \ | sen\theta_1 \ \xi_1(\theta_2) - sen\alpha^1_k \ \xi_1(\beta_k) |_2 \\
&= \ | \beta v_2 + (v_2 - v_1) |_2 \\
&\geq \ | v_2 - v_1 |_2 \\
&= \ sen\alpha^1_k \ \ | \xi_1(\theta_2) - \xi_1(\beta_k) |_2 \\
&= \ \cos 2^{-k}\pi \ | \xi_1(\theta_2) - \xi_1(\beta_k) |_2 \, .
\end{aligned}$$

Agora, se $\pi/2 - 2^{-k+1}\pi \leq \theta_1 \leq \alpha^1_k$, tomamos $v_1 = sen\theta_1 \ \xi_1(\theta_2)$, $v_2 = sen\theta_1 \ \xi_1(\beta_k)$, $\beta = (sen\alpha^1_k - sen\theta_1)/sen\theta_1$. Então $\beta \geq 0$, $\ | v_1 |_2 = | v_2 |_2 \ $ e, assim, também vale a desigualdade (2) neste caso. Portanto,

$$\begin{aligned}
(4) \qquad | y - x_k |_3 \ &= \ | (cos\theta_1, sen\theta_1 \ \xi_1(\theta_2)) - (cos\alpha^1_k, sen\alpha^1_k \ \ \xi_1(\alpha^2_k)) |_3 \\
&\geq \ | sen\theta_1 \ \xi_1(\theta_2) - sen\alpha^1_k \ \xi_1(\beta_k) |_2 \\
&= \ | \beta v_2 + (v_2 - v_1) |_2 \\
&\geq \ | v_2 - v_1 |_2 \\
&= \ sen\alpha^1_k \ | \xi_1(\theta_2) - \xi_1(\beta_k) |_2 \\
&= \ cos 2^{-k}\pi \ | \xi_1(\theta_2) - \xi_1(\beta_k) |_2 \, .
\end{aligned}$$

Logo, segue por (3) e (4) e pela Observação 2.8 que, se $\theta_1 \in I^k_{2^k-2}$ e $\theta_2 \notin I^k_1$, então

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad | y - x_k |_3 &\geq cos 2^{-k}\pi \mid \xi_1(\theta_2) - \xi_1(\beta_k) \mid_2 \\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{2}(2 - 2cos2^{-k}\pi)^{1/2} = \rho_k.
\end{aligned}
$$

Portanto, se $y \notin Q_k$, segue pelas desigualdades (1) e (5) que $y \notin B'_2(x_k, \rho_k)$, isto é, $Q^c_k \subset (B'_2(x_k, \rho_k))^c$, e assim obtemos que $B'_2(x_k, \rho_k) \subset Q_k$.

2.10. LEMA. Se $x \in S^2$ e $0 \leq \rho \leq 2$, então $\sigma(B'_2(x, \rho)) = \pi\rho^2$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\mathbb{1} = (1, 0, 0), x \in S^2$ e $0 \leq \rho \leq 2$. Como $SO(3)$ age transitivamente sobre S^2, existe $u \in SO(3)$ tal que $u(\mathbb{1}) = x$. Além disso, a medida de Lebesgue sobre S^2 é invariante por rotações e assim

$$\sigma(B'_2(x, \rho)) = \sigma(u(B'_2(\mathbb{1}, \rho))) = \sigma(B'_2(\mathbb{1}, \rho)).$$

Portanto, é suficiente demonstrar o lema para $x = \mathbb{1}$.

Observamos que

$$| \xi_2(\theta_1, \theta_2) - \mathbb{1} |_3 = (2 - 2cos\theta_1)^{1/2}.$$

Logo, como a função $v(t) = arc\ cos t$ é decrescente no intervalo $[-1, 1]$, segue que, para $0 \leq \rho \leq 2$,

$$| \xi_2(\theta_1, \theta_2) - \mathbb{1} |_3 \leq \rho \ \Leftrightarrow \ \theta_1 \leq arc\ cos\left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right).$$

Portanto, $B'_2(\mathbb{1}, \rho) = \{\xi_2(\theta_1, \theta_2) : 0 \leq \theta_1 \leq arc\ cos\left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right),\ 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi\}$, e assim

$$\sigma(B'_2(\mathbb{1}, \rho)) = \int_0^{2\pi} d\theta_2 \int_0^{arc\ cos(1 - \frac{\rho^2}{2})} sen\theta_1 d\theta_1 = \pi\rho^2.$$

2.11. TEOREMA. **(a)** Se $k \geq 0$, $Q_1 \in \mathcal{A}_k$ e $Q_2 \in \mathcal{A}_{k+1}$ com $Q_2 \subset Q_1$, então

$$\sigma(Q_1) \leq 8\sigma(Q_2).$$

(b) Para todo $Q \in \mathcal{A}_k, k \geq 0$, existem $x \in Q$ e $0 \leq \ell \leq 2$ dependendo somente de k tais que $Q \subset B'_2(x, \ell)$ e

$$\sigma(B_2'(x,\ell)) \leq 4\pi^2\sigma(Q).$$

(c) Para todo $x \in S^2$ e todo $0 \leq \ell \leq 2$, existem $k \geq 0$, $Q \in \mathcal{A}_k$ e $u \in SO(3)$ tais que $B_2'(x,\ell) \subset u(Q)$ e

$$\sigma(Q) \leq 11\sigma(B_2'(x,\ell)).$$

DEMONSTRAÇÃO. (a): É trivial para $k = 0$ pois, neste caso, $Q_1 = S^2$ e Q_2 é uma metade da esfera S^2. Vamos supor, então, $k \geq 1$, $Q_1 = \xi_2(G_1) \in \mathcal{A}_k$, $Q_2 = \xi_2(G_2) \in \mathcal{A}_{k+1}$, com $Q_2 \subset Q_1$. Se $G_1 = I_j^k \times I_\ell^r$, segue do Lema 2.5 (a) que $G_2 = I_i^{k+1} \times I_n^s$, com $i \in \{2j-1, 2j\}$ e $s \in \{r, r+1\}$. Como $s = r$ ou $s = r+1$, segue que I_n^s é igual a I_ℓ^r, ou I_n^s é uma metade do intervalo I_ℓ^r. Logo, obtemos que

$$\sigma(Q_1) = \int_{I_\ell^r} d\theta_2 \int_{I_j^k} sen\theta_1 d\theta_1 \leq 2\int_{I_n^s} d\theta_2 \int_{I_j^k} sen\theta_1 d\theta_1. \tag{1}$$

É suficiente demonstrar (a) para $i = 2j-1$, pois, como a função seno é crescente no intervalo $[0, \pi/2]$, temos que

$$\begin{aligned} \sigma(\xi_2(I_{2j-1}^{k+1} \times I_n^s)) &= \int_{I_n^s} d\theta_2 \int_{I_{2j-1}^{k+1}} sen\theta_1 d\theta_1 \\ &\leq \int_{I_n^s} d\theta_2 \int_{I_{2j}^{k+1}} sen\theta_1 d\theta_1 \\ &= \sigma(\xi_2(I_{2j}^{k+1} \times I_n^s)). \end{aligned}$$

Se $j \geq 1$, tomamos $t = \dfrac{\theta_1}{2} + (j-1)2^{-k}\pi$ e obtemos

$$\int_{I_j^k} sen\theta_1 d\theta_1 = 2\int_{I_{2j-1}^{k+1}} sen(2(t-(j-1)2^{-k}\pi))dt.$$

Mas, como $sen2t \leq 2sent$ para $0 \leq t \leq \pi/2$, e a função seno é crescente neste intervalo, temos que

$$\begin{aligned} \int_{I_j^k} sen\theta_1 d\theta_1 &\leq 4\int_{I_{2j-1}^{k+1}} sen(t-(j-1)2^{-k}\pi)dt \\ &\leq 4\int_{I_{2j-1}^{k+1}} sentdt. \end{aligned} \tag{2}$$

Portanto, segue por (1) e (2) que

$$\begin{aligned}\sigma(Q_1) &\leq 2\int_{I_n^r} d\theta_2 \int_{I_j^k} sen\theta_1 d\theta_1 \\ &\leq 8\int_{I_n^r} d\theta_2 \int_{I_{2j-1}^{k+1}} sen\theta_1 d\theta_1 = 8\sigma(Q_2).\end{aligned}$$

(b): Como os elementos de $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_1$ são bolas em S^2, podemos supor $k \geq 2$. Sejam então $k \geq 2$ e $Q = \xi_2(G) \in \mathcal{A}_k$, onde $G = I_j^k \times I_\ell^r$, com $j = 1$ e $1 \leq \ell \leq 4$ se $r = 2$ e $2^{r-3}+1 \leq j \leq 2^{r-2}$, $1 \leq \ell \leq 2^r$ se $3 \leq r \leq k$. Sejam $\phi = (j-1)2^{-k+1}\pi$, $t = 2^{-k+1}\pi$ e $\alpha = 2^{-r+1}\pi$. Se $j = 2^{r-3} + i$ e $1 \leq i \leq 2^{r-3}$, então

$$\frac{\pi t}{4\alpha} + (i-1)t = \frac{\pi 2^{-k+1}\pi}{4.2^{-r+1}\pi} + (j - 2^{r-3} - 1)2^{-k+1}\pi = \phi.$$

Como a função seno é crescente em $[0, \pi/2]$, segue que, considerando ϕ, t e α fixados, o elemento Q de menor área é obtido quando tomamos o menor valor possível para j, isto é, $i = 1$. Portanto, é suficiente na demonstração de (b) tomar $i = 1$, isto é, $\phi = \pi t/4\alpha$.

Pelo Lema 2.7, existe $x \in Q$ tal que $Q \subset B_2'(x, \delta_k)$, onde $\delta_k = (1 + 2^{-2}\pi)2^{-k+1}\pi$. Temos, pelo Lema 2.10 que

$$\sigma(B_2'(x,\delta_k)) = \pi(\delta_k)^2 = \pi(1 + 2^{-2}\pi)(2^{-k+1}\pi)^2 < 4\pi t^2$$

e

$$\sigma(Q) = \int_{I_\ell^r} d\theta_2 \int_{I_j^k} sen\theta_1 d\theta_1 = \alpha(cos\phi - cos(\phi + t)).$$

Portanto, para $j \geq 2$, temos que

$$(3)\qquad \begin{aligned}\frac{\sigma(B_2'(x,\delta_k))}{\sigma(Q)} &< \frac{4\pi t^2}{\alpha(cos\phi - cos(\phi+t))} \\ &= \frac{16\phi t}{cos\phi - cos\phi cost + sen\phi sent} \\ &\leq \frac{16\phi t}{sen\phi sent}.\end{aligned}$$

Seja, agora, $h(t) = \dfrac{t}{sent}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$. Temos que $h'(t) = \dfrac{g(t)}{sen^2 t}$, onde $g(t) = sent - tcost$. Como $g'(t) = tsent > 0$ para $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, segue que $g(t)$ é crescente.

Mas $g(0) = 0$ e assim $g(t) > 0$ para $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$. Logo, $h'(t) > 0$ para $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ e, portanto, h é crescente no intervalo $(0, \pi/2)$. Agora, como $t = 2^{-k+1}\pi \leq \phi < \dfrac{\pi}{2}$, pois $j \geq 2$, usando (3) obtemos

$$\frac{\sigma(B_2'(x,\delta_k))}{\sigma(Q)} \leq \frac{16\phi t}{sen\phi sent} \leq 16\left(\frac{\phi}{sen\phi}\right)^2 \leq 4\pi^2.$$

Suponhamos, agora, $j = 1$. Neste caso, $\phi = 0, \alpha = \pi/2$ e, portanto,

$$(4) \qquad \frac{\sigma(B_2'(x,\delta_k))}{\sigma(Q)} < \frac{4\pi t^2}{\alpha(cos\phi - cos(\phi + t))} = \frac{8t^2}{(1 - cost)}.$$

Tomemos $f(t) = \dfrac{t^2}{(1 - cost)}$. Derivando $f(t)$, podemos mostrar que $f''(t) > 0$ para $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, e assim concluir que $f'(t)$ é crescente. Como $f'(0) = 0$, segue que $f'(t) > 0$ e, conseqüentemente, $f(t)$ é crescente. Portanto, $f(t) \leq f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$, para todo $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$. Assim, usando (4), obtemos

$$\frac{\sigma(B_2'(x,\delta_k))}{\sigma(Q)} < 2\pi^2.$$

(c): Seja $\rho_k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(2 - 2cos2^{-k}\pi)^{1/2}$, para $k \geq 2$. Se $x \in S^2$ e $\sqrt{2} < \ell \leq 2$, então, pelo Lema 2.10, se $Q_0 = S^2 \in \mathcal{A}_0$, temos

$$\frac{\sigma(Q_0)}{\sigma(B_2'(x,\ell))} = \frac{4\pi}{\pi\ell^2} < \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2.$$

Se $x \in S^2$ e $\rho_2 < \ell \leq \sqrt{2}$, ainda pelo Lema 2.10, se $Q_1 \in \mathcal{A}_1$, temos que Q_1 é uma metade da esfera S^2 e, portanto,

$$\frac{\sigma(Q_1)}{\sigma(B_2'(x,\ell))} < \frac{2}{\rho_2^2} = \frac{4}{2 - \sqrt{2}} < 7.$$

Agora, seja $x \in S^2$ e suponhamos $\rho_{k+1} < \ell \leq \rho_k$, para $k \geq 2$. Sejam Q_k e x_k como no Lema 2.9 e seja $u \in SO(3)$ tal que $u(x_k) = x$. Então, por este mesmo lema, segue que $B_2'(x,\ell) \subset u(Q)$. Se $t = 2^{-k+1}\pi$, temos, então

$$\sigma(B_2'(x_k, \rho_{k+1})) = \pi\rho_{k+1}^2 = \pi\left(1 - cos\frac{t}{4}\right)$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma(Q_k) &= \sigma(\xi_2(I^k_{2^k-2} \times I^k_1)) \\
&= \int_{I^k_1} d\theta_2 \int_{I^k_{2^k-2}} sen\theta_1 d\theta_1 \\
&= t\int_{\pi/2-t}^{\pi/2} sen\theta_1 d\theta_1 = tsent.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\sigma(Q_k)}{\sigma(B'_2(x, \rho_{k+1}))} = \frac{1}{\pi}\frac{tsent}{(1 - cos(\frac{t}{4}))}. \tag{5}$$

Como $0 < t < 1$, usando séries de potências obtemos

$$\begin{aligned}
1 - cos\left(\frac{t}{4}\right) &= \frac{t^2}{32} - \frac{t^4}{6.144} + \cdots \\
&\geq \frac{t^2}{32}\left(1 - \frac{t^2}{192}\right) \\
&\geq \frac{t^2}{32}\left(1 - \frac{(\pi/2)^2}{192}\right) \\
&\geq \frac{t^2}{32}\ 0,98.
\end{aligned}$$

Portanto, segue por (5) que

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(Q_k)}{\sigma(B'_2(x, \ell))} &\leq \frac{\sigma(Q_k)}{\sigma(B'_2(x_k, \rho_{k+1}))} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{tsent}{(1 - cos(\frac{t}{4}))} \\
&\leq \frac{32t^2}{t^2 0,98\pi} < 11,
\end{aligned}$$

o que demonstra (c).

2.12. OBSERVAÇÃO. Se tomarmos os intervalos I^k_j, onde k é um inteiro não negativo e $1 \leq j \leq 2^k$, definidos no início desta seção como sendo o intervalo semi-aberto

$$I^k_j = [(j-1)2^{-k+1}\pi, j2^{-k+1}\pi),$$

e a partir daí fizermos uma decomposição de S^2 de maneira idêntica à decomposição construída com os intervalos I_j^k fechados, obteremos, na verdade, uma partição de S^2. De fato, se Q_1 e Q_2 são elementos não sobrepostos da nova decomposição, temos que $Q_1 \cap Q_2 = \phi$. Todos os resultados obtidos neste capítulo continuarão válidos para esta nova decomposição. As demonstrações são análogas às que foram feitas considerando os intervalos I_j^k fechados.

CAPÍTULO II

A TEORIA DE CALDERÓN-ZYGMUND PARA S^2

Em 1952, A.P. Calderón e A. Zygmund criaram um método simples, mas poderoso, que pode ser utilizado na demonstração de uma série de resultados em Matemática, o qual ficou conhecido como *"a decomposição de Calderón-Zygmund"*. Este método tem como base as decomposições diádicas do $\mathbb{R}^n$. Neste capítulo, utilizamos o método de Calderón-Zygmund tendo como base as decomposições do tipo diádico de S^2 introduzidas no Capítulo I. Este método também será chamado aqui *"a decomposição de Calderón-Zygmund"*. Alguns dos resultados deste capítulo serão usados nos capítulos seguintes.

Na primeira seção definimos o operador maximal do tipo diádico e, usando a decomposição de Calderón-Zygmund de S^2, demonstramos propriedades deste operador. Um dos resultados demonstrados é a limitação deste operador em $L^p(S^2)$. Este resultado já é conhecido, mas a sua demonstração é obtida pela Teoria dos Martingais, considerando a seqüência de σ-álgebras geradas pelas decomposições $\mathcal{A}_k$ introduzidas no Capítulo I (ver Neveu [14], pág. 68). Um outro resultado que obtemos nesta seção é um teorema do tipo do Teorema de Diferenciação de Lebesgue, o qual também é conhecido da Teoria dos Martingais, como teorema de convergência de Martingais (ver Neveu [14], pág. 62). A demonstração dos resultados desta seção é baseada na demonstração de resultados análogos para o operador maximal de Hardy-Littlewood, os quais podem ser encontrados no Capítulo II de Garcia-Cuerva e Rubio de Francia [10] e também em Stein-Weiss [19] e Torchinsky [20].

Na segunda seção fazemos uma decomposição de Calderón-Zygmund para funções reais definidas em S^2, análoga à decomposição de mesmo nome para funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$ (ver Garcia-Cuerva e Rubio de Francia [10], demonstração de II-5.7) . Nesta decomposição, escrevemos uma função de $L^1(S^2)$ como soma de duas funções, uma chamada de *"parte boa"* e a outra de *"parte ruim"* da função dada.

1. OPERADOR MAXIMAL DO TIPO DIÁDICO E A DECOMPOSIÇÃO DE CALDERÓN-ZYGMUND

1.1. DEFINIÇÃO. Seja μ uma medida definida sobre a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{S^2}$ de S^2, e seja $f : S^2 \to I\!\!R$ uma função $\mathcal{B}_{S^2}$-mensurável. Se $0 < p < \infty$, dizemos que $f \in L^p(S^2, \mu)$ se

$$\|f\|_p = \left(\int_{S^2} | f(x) |^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Se $\mu = \sigma$, onde σ é a medida definida no Capítulo I, denotaremos $L^p(S^2, \mu)$ por $L^p(S^2)$.

1.2. OBSERVAÇÃO. Se $f = g$ q.s. em S^2, então f e g são identificadas como a mesma função em $L^p(S^2, \mu)$. Dessa forma, a aplicação $f \mapsto \|f\|_p$ é uma norma em $L^p(S^2, \mu)$, se $1 \leq p < \infty$; e, com essa norma, $L^p(S^2, \mu)$ é um espaço de Banach.

1.3. DEFINIÇÃO. Seja $f \in L^1(S^2)$. Se $x \in S^2$, definimos

$$M_d f(x) = \sup_{\substack{x \in Q \\ Q \in \mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q | f(y) | \, d\sigma(y),$$

onde $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k$. Chamaremos $M_d f$ de função maximal do tipo diádico de f, e M_d de operador maximal do tipo diádico.

1.4. TEOREMA. Seja $f \in L^1(S^2)$. Então, para todo $t > 0$, o conjunto $E_t = \{x \in S^2 : M_d f(x) > t\}$ é a união de uma família $\{Q_{j,t}\}_{j \in J_t}$ de elementos do tipo diádico não sobrepostos (isto é, se $i, j \in J_t$ e $i \neq j$, então $\sigma(Q_{i,t} \cap Q_{j,t}) = 0$), que satisfazem

$$t < \frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} | f(x) | \, d\sigma(x) \leq 8t. \tag{1}$$

Além disso,

$$\sigma(E_t) \leq \frac{1}{t} \int_{S^2} | f(x) | \, d\sigma(x). \tag{2}$$

DEMONSTRAÇÃO. Dado $t > 0$, seja C_t a família dos elementos do tipo diádico $Q_{j,t} \in \mathcal{A}$ que satisfazem a condição

$$t < \frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} | f(x) | \, d\sigma(x) \tag{3}$$

e que são maximais entre aqueles que satisfazem (3) (isto é, se $Q_{j,t}$ e $Q_{i,t}$ pertencem a C_t, com $Q_{j,t} \subset Q_{i,t}$, então $Q_{i,t} = Q_{j,t}$). Dessa forma, todo $Q \in \mathcal{A}$, satisfazendo (3), está contido em algum $Q_{j,t} \in C_t$. Além disso, da forma como foram definidos os elementos de C_t, é claro que eles não se sobrepõem. Se $Q_{j,t} \in C_t$, então existe k tal que $Q_{j,t} \in \mathcal{A}_k$. Seja Q' o único elemento do tipo diádico em $\mathcal{A}_{k-1}$ que contém $Q_{j,t}$. Então, como $Q' \notin C_t$ (pois, caso contrário, $Q_{j,t}$ não seria maximal e daí não pertenceria a C_t), temos que

$$\frac{1}{\sigma(Q')} \int_{Q'} \mid f(x) \mid d\sigma(x) \leq t. \tag{4}$$

Pelo Teorema 2.11 do capítulo anterior, como $Q_{j,t} \in \mathcal{A}_k, Q' \in \mathcal{A}_{k-1}$ e $Q_{j,t} \subset Q'$, temos que $\sigma(Q') \leq 8\sigma(Q_{j,t})$. Logo, usando (4), obtemos

$$\frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} \mid f(x) \mid d\sigma(x) \leq \frac{8}{\sigma(Q')} \int_{Q'} \mid f(x) \mid d\sigma(x) \leq 8t.$$

Assim, obtivemos uma família $C_t = \{Q_{j,t}\}_{j \in J_t}$ de elementos do tipo diádico tal que, para todo $j \in J_t$, temos

$$t < \frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} \mid f(x) \mid d\sigma(x) \leq 8t.$$

Vamos mostrar agora que E_t é a união dos elementos da família C_t. Seja $x \in E_t$. Então, $M_d f(x) > t$. Portanto, existe algum elemento do tipo diádico Q_x, contendo x, tal que

$$t < \frac{1}{\sigma(Q_x)} \int_{Q_x} \mid f(y) \mid d\sigma(y).$$

Se $C_t = \{Q_{j,t}\}_{j \in J_t}$, existe $j \in J_t$ tal que $Q_x \subset Q_{j,t}$. Portanto, $x \in Q_{j,t}$ e assim $E_t \subset \bigcup_{j \in J_t} Q_{j,t}$. Reciprocamente, se $x \in \bigcup_{j \in J_t} Q_{j,t}$, existe $j_0 \in J_t$ tal que $x \in Q_{j_0,t}$. Como $Q_{j_0,t} \in C_t$, temos que

$$t < \frac{1}{\sigma(Q_{j_0,t})} \int_{Q_{j_0,t}} \mid f(y) \mid d\sigma(y) \leq M_d f(x).$$

Portanto, $\bigcup_{j \in J_t} Q_{j,t} \subset E_t$, e daí segue que $E_t = \bigcup_{j \in J_t} Q_{j,t}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sigma(E_t) &= \sum_{j \in J_t} \sigma(Q_{j,t}) \\
&\leq \frac{1}{t} \sum_{j \in J_t} \int_{Q_{j,t}} \mid f(x) \mid d\sigma(x) \\
&\leq \frac{1}{t} \int_{S^2} \mid f(x) \mid d\sigma(x),
\end{aligned}$$

o que demonstra o teorema.

1.5. LEMA (Folland [9], pág. 69). Dados $f \in L^1(I\!R^2)$ e $\varepsilon > 0$, existe uma função real h definida em $I\!R^2$, contínua, que se anula fora de um conjunto limitado, tal que

$$\int_{I\!R^2} \mid f(x) - h(x) \mid dx < \varepsilon.$$

1.6. LEMA (Fernandez [8], pág. 71). Seja f uma função não negativa em $L^1(S^2)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer conjunto $A \subset S^2$, com $\sigma(A) < \delta$, temos

$$\int_A f(x) d\sigma(x) < \varepsilon.$$

1.7. LEMA. Sejam $f \in L^1(S^2)$ e $\varepsilon > 0$. Então existe uma função $g : S^2 \to I\!R$, contínua em $\xi_2((0,\pi) \times (0, 2\pi))$, satisfazendo

$$\int_{S^2} \mid f(x) - g(x) \mid d\sigma(x) < \varepsilon.$$

DEMONSTRAÇÃO. Por I-1.5 e do fato que $f \in L^1(S^2)$, temos

(1)
$$\int_{S^2} \mid f(x) \mid d\sigma(x) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mid f(\xi_2(\theta)) \mid sen\theta_1 d\theta < \infty.$$

Seja $\phi(\theta_1, \theta_2) = f(\xi_2(\theta_1, \theta_2)) sen\theta_1$. Então, por (1), temos que $\phi \in L^1(\mathcal{D}^2)$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, pelo Lema 1.5, existe uma função contínua e limitada $\psi : \mathcal{D}^2 \to I\!R$ tal que

(2)
$$\int_{D_2} \mid \phi(\theta) - \psi(\theta) \mid d\theta < \varepsilon.$$

Sabemos que $\xi_2 : A = (0,\pi) \times (0, 2\pi) \to \xi_2(A) = B$ tem inversa $\xi_2^{-1} : B \to A$, $\xi_2^{-1}(x, y, z) = (arc\ cos x, arc\ tg\ z/y)$, que é uma função contínua. Como $h : A \to I\!R$ dada por $h(\theta_1, \theta_2) = \psi(\theta_1, \theta_2)/sen\theta_1$ é contínua, então $g = h \circ \xi_2^{-1} : B \to I\!R$ também é contínua. Para $x \in S^2 \backslash B$, tomamos $g(x) = 0$ e, usando (2), temos

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} \mid f(x) - g(x) \mid d\sigma(x) &= \int_B \mid f(x) - g(x) \mid d\sigma(x) \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mid f(\xi_2(\theta_1, \theta_2)) - g(\xi_2(\theta_1, \theta_2)) \mid sen\theta_1 d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mid \phi(\theta_1, \theta_2) - \psi(\theta_1, \theta_2) \mid d\theta \\
&= \int_{D_2} \mid \phi(\theta) - \psi(\theta) \mid d\theta < \varepsilon.
\end{aligned}$$

1.8. TEOREMA. Seja $f \in L^1(S^2)$. Então, para quase todo $x \notin \bigcup_{Q \in \mathcal{A}} \partial Q$, temos que

(1) $$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sigma(Q_k)}\int_{Q_k} | f(y)-f(x) | d\sigma(y)=0,$$

onde os $Q_k \in \mathcal{A}_k$ são escolhidos de forma que $x \in \overset{o}{Q}_k$. Ou seja, o limite (1) vale para quase todo $x \in S^2$.

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente mostrar que, para todo $t > 0$, o conjunto

$$A_t = \left\{x \in S^2 : \lim_{k\to\infty} sup \frac{1}{\sigma(Q_k)}\int_{Q_k} | f(y)-f(x) | d\sigma(y) > t\right\}$$

tem medida zero, pois o conjunto onde o limite (1) não vale está contido em $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{1/j}\right) \cup \left(\bigcup_{Q\in\mathcal{A}} \partial Q\right)$, e é trivial que $\sigma\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{A}} \partial Q\right) = 0$.

Fixemos $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 1.7, podemos escrever $f = g + h$, com g contínua em $\xi_2((0,\pi)\times(0,2\pi))$ e $\int_{S^2} | h |< \varepsilon$. Fixemos $x \in S^2$ tal que $x \notin \bigcup_{Q\in\mathcal{A}} \partial Q$, e seja $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma família de elementos do tipo diádico tal que $Q_k \in \mathcal{A}_k$ e $x \in \overset{o}{Q}_k$. Como $x \notin \partial Q$ para todo $Q \in \mathcal{A}$, existe $k_1 \in I\!N$ tal que $Q_k \subset \overset{o}{Q}_{k_1}$, para todo $k > k_1$. Como g é contínua em $\overset{o}{Q}_{k_1}$ e Q_k é compacto, segue que g é uniformemente contínua para todo $k > k_1$. Então, dado $\varepsilon' > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $k > k_1$ e $y, z \in Q_k$ com $| y - z |< \delta$, então $| g(y) - g(z) |< \varepsilon'$. Por I-2.7 segue que, se $Q_k \in \mathcal{A}_k$, existe $z_k \in Q_k$ tal que $Q_k \subset B_2'(z_k, \delta_k)$, onde $\delta_k = (1+2^{-2}\pi)2^{-k+1}\pi$. Vamos escolher k_2 de maneira que $\delta_{k_2} < \delta/2$, e seja $k_0 = max\{k_1, k_2\}$. Então, se $k > k_0$, temos que $Q_k \subset \overset{o}{Q}_{k_1}$ e $\delta_k < \delta/2$. Daí, para todo $k > k_0$ temos $Q_k \subset B_2'(z_k, \delta/2)$ e, assim, se $y, z \in Q_k$, temos $| y - z |< \delta$ e, portanto, $| g(y) - g(z) |< \varepsilon'$. Como $x \in Q_k$ para todo k, se $k > k_0$ e $y \in Q_k$, temos

$$\frac{1}{\sigma(Q_k)}\int_{Q_k} | g(y)-g(x) | d\sigma(y) < \varepsilon'.$$

Logo,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sigma(Q_k)}\int_{Q_k} | g(y)-g(x) | d\sigma(y)=0$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} sup \frac{1}{\sigma(Q_k)} \int_{Q_k} \mid f(y) - f(x) \mid d\sigma(y) &\leq \lim_{k\to\infty} sup \frac{1}{\sigma(Q_k)} \int_{Q_k} \mid g(y) - g(x) \mid d\sigma(y) \\
&+ \lim_{k\to\infty} sup \frac{1}{\sigma(Q_k)} \int_{Q_k} \mid h(y) - h(x) \mid d\sigma(y) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} sup \frac{1}{\sigma(Q_k)} \int_{Q_k} \mid h(y) \mid d\sigma(y) \\
&+ \lim_{k\to\infty} sup \frac{1}{\sigma(Q_k)} \int_{Q_k} \mid h(x) \mid d\sigma(y) \\
&\leq M_d h(x) + \mid h(x) \mid .
\end{aligned}$$

Mas

$$A_t \subset \{x \in S^2 : M_d h(x) > t/2\} \cup \{x \in S^2 : \mid h(x) \mid > t/2\},$$

e, pelo Teorema 1.4, temos

$$\sigma(\{x \in S^2 : M_d h(x) > t/2\}) \leq \frac{2}{t} \int_{S^2} \mid h(x) \mid d\sigma(x) < \frac{2\varepsilon}{t}.$$

Ainda, temos que

$$\sigma(\{x \in S^2 : \mid h(x) \mid > t/2\}) \leq \int_{S^2} \frac{2}{t} \mid h(x) \mid d\sigma(x) < \frac{2\varepsilon}{t}.$$

Portanto, $\sigma(A_t) \leq 4\varepsilon/t$. Como ε é arbitrário, temos que $\sigma(A_t) = 0$, o que demonstra o teorema.

1.9. COROLÁRIO. Seja $f \in L^1(S^2)$. Então, para quase todo $x \in S^2$, temos

(1) $f(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sigma(Q_k)} \int_{Q_k} f(y) d\sigma(y)$,

(2) $\mid f(x) \mid \leq M_d f(x)$,

onde os $x \in S^2$ são escolhidos de forma que $x \notin \bigcup_{Q\in\mathcal{A}} \partial Q$.

DEMONSTRAÇÃO. (1): Pelo Teorema 1.8 temos que

$$\left| \frac{1}{\sigma(Q_k)} \int_{Q_k} f(y) d\sigma(y) - f(x) \right| \leq \frac{1}{\sigma(Q_k)} \int_{Q_k} \mid f(y) - f(x) \mid d\sigma(y) \to 0$$

quando $k \to \infty$, para quase todo $x \in S^2$. Logo, para quase todo $x \in S^2$, temos

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sigma(Q_k)} \int_{Q_k} f(y)d\sigma(y).$$

(2): Por (1), para quase todo $x \in S^2$, temos

$$| f(x) | \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sigma(Q_k)} \int_{Q_k} | f(y) | d\sigma(y) \leq M_d f(x).$$

1.10. OBSERVAÇÃO. Observamos que, dados $f \in L^1(S^2)$, se $t > 0$, o Corolário 1.9 juntamente com o Teorema 1.4 nos dão uma decomposição de S^2 com relação à f e a t, em duas partes: Um conjunto Ω formado pela união de elementos do tipo diádico $\{Q_{j,t}\}_{j\in J_t}$ não sobrepostos, cuja média de $| f |$ sobre cada $Q_{j,t}$ está entre t e $8t$, ou seja, tais que

$$t < \frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} | f(x) | d\sigma(x) \leq 8t,$$

para todo $j \in J_t$, e um conjunto $F = \Omega^c$, onde $| f(x) | \leq t$ q.s. De fato, se existe um conjunto A de medida positiva tal que $A \subset \Omega^c$ e $| f(x) | > t$ para quase todo $x \in A$, então o Corolário 1.9(2) nos dá que $M_d f(x) > t$, para quase todo $x \in A$. Absurdo, pois $A \subset \Omega^c$.

1.11. DEFINIÇÃO. Seja μ uma medida de Borel positiva e finita sobre S^2, satisfazendo a seguinte condição: Existe $C > 0$ tal que, se $Q_1 \in \mathcal{A}_k$ e $Q_2 \in \mathcal{A}_{k+1}$ com $Q_2 \subset Q_1$, então

$$\mu(Q_1) \leq C\mu(Q_2). \tag{1}$$

Sejam $f \in L^1(S^2)$ e $x \in S^2$. Definimos

$$M_{d,\mu} f(x) = \sup_{\substack{x\in Q \\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q | f(y) | d\mu(y).$$

$M_{d,\mu}$ é chamada função maximal de tipo diádico de f com respeito à medida μ.

1.12. OBSERVAÇÃO. Se $f \in L^1(S^2, \mu)$ e se $t > 0$, podemos obter uma decomposição de Calderón-Zygmund de S^2 com respeito a f e t relativa à medida μ e podemos também estimar a medida μ do conjunto $E_t = \{x \in S^2 : M_{d,\mu} f(x) > t\}$. Para isso, utilizamos raciocínio idêntico às demonstrações anteriores e obtemos o análogo de todos os resultados para a medida μ no lugar de σ, trocando 8 pela constante C.

1.13. TEOREMA. Seja μ uma medida de Borel regular em S^2 satisfazendo a condição (1) da Definição 1.11. Então, para cada p com $1 < p < \infty$, existe uma constante $C_p > 0$ tal que, para toda $f \in L^p(S^2, \mu)$, temos

$$(1) \qquad \Big(\int_{S^2}(M_{d,\mu}f(x))^p d\mu(x)\Big)^{1/p} \leq C_p\Big(\int_{S^2} \mid f(x) \mid^p d\mu(x)\Big)^{1/p}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Fixado $t > 0$, seja $f_1(x)$ definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } \mid f(x) \mid > t/2 \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Então, $\mid f(x) \mid \leq \mid f_1(x) \mid + t/2$ e $M_{d,\mu}f(x) \leq M_{d,\mu}f_1(x) + t/2$. Portanto, $\{x : M_{d,\mu}f(x) > t\} \subset \{x : M_{d,\mu}f_1(x) > \frac{t}{2}\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \mu(\{x : M_{d,\mu}f(x) > t\}) &\leq \mu(\{x : M_{d,\mu}f_1(x) > t/2\}) \\ &\leq \frac{2}{t}\int_{S^2} \mid f_1(x) \mid d\mu(x) \\ &= \frac{2}{t}\int_{\{x:|f(x)|>t/2\}} \mid f(x) \mid d\mu(x). \end{aligned}$$

Portanto, pelo resultado 1 do Apêndice, temos

$$\begin{aligned} \int_{S^2}(M_{d,\mu}f(x))^p d\mu(x) &= p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{x : M_{d,\mu}f(x) > t\})dt \\ &\leq p\int_0^\infty t^{p-1}\Big(\frac{2}{t}\int_{\{x:|f(x)|>t/2\}} \mid f(x) \mid d\mu(x)\Big)dt \\ &= 2p\int_0^\infty t^{p-2}\Big(\int_{\{x:|f(x)|>t/2\}} \mid f(x) \mid d\mu(x)\Big)dt. \end{aligned}$$

Mudando a ordem de integração, a integral com respeito a t se torna

$$\int_0^{2|f(x)|} t^{p-2}dt = 2^{p-1}\frac{\mid f(x) \mid^{p-1}}{p-1}.$$

pois $p > 1$. Então,

$$\int_{S^2}(M_{d,\mu}f(x))^p d\mu(x) \leq \frac{2^p p}{p-1}\int_{S^2} \mid f(x) \mid^p d\mu(x)$$

e o teorema está demonstrado para $C_p = 2\Big(\dfrac{p}{p-1}\Big)^{\frac{1}{p}}$.

2. A DECOMPOSIÇÃO DE CALDERÓN-ZYGMUND DE UMA FUNÇÃO

2.1. DEFINIÇÃO. Seja $f \in L^1(S^2)$, e sejam $t > 0$, $C_t = \{Q_{j,t}\}_{j\in J_t}$ e E_t como no enunciado do Teorema 1.4. Definimos, para $x \in S^2$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \notin E_t \\ \displaystyle\sum_{j\in J_t} \Big(\frac{1}{\sigma(Q_{j,t})}\int_{Q_{j,t}} f(y)d\sigma(y)\Big)\chi_{Q_{j,t}}(x), & \text{se } x \in E_t \end{cases}$$

e, para $j \in J_t$, definimos

$$h_j(x) = f(x)\chi_{Q_{j,t}}(x) - \Big(\frac{1}{\sigma(Q_{j,t})}\int_{Q_{j,t}} f(y)d\sigma(y)\Big)\chi_{Q_{j,t}}(x).$$

Se $x \notin E_t = \bigcup_{j\in J_t} Q_{j,t}$ temos que

$$g(x) + \sum_{j\in J_t} h_j(x) = f(x)$$

e, para $x \in E_t$ temos que

$$g(x) + \sum_{j\in J_t} h_j(x) = \sum_{j\in J_t} f_{Q_{j,t}}\chi_{Q_{j,t}}(x) + \sum_{j\in J_t} f(x)\chi_{Q_{j,t}}(x) - \sum_{j\in J_t} f_{Q_{j,t}}\chi_{Q_{j,t}}(x) = f(x),$$

$\forall x \notin \bigcup_{Q\in\mathcal{A}} \partial Q$, onde $f_{Q_{j,t}} = \dfrac{1}{\sigma(Q_{j,t})}\displaystyle\int_{Q_{j,t}} f(x)d\sigma(x)$.

Se escrevemos $b = \sum_{j\in J_t} h_j$, temos, então $f(x) = g(x) + b(x)$ q.s. A esta decomposição de f damos o nome de *"decomposição de Calderón-Zygmund de f"*, g é chamada *"parte boa"* e b, *"parte ruim"* da função f.

2.2. TEOREMA. Sejam $f \in L^1(S^2)$, $t > 0$ e g, h_j como na definição acima. Então,

(1) $|\, g(x) \,| \leq 8t$ q.s.;

(2) $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$;

(3) suporte de $h_j \subset Q_{j,t}$;

(4) $\displaystyle\int_{S^2} h_j(y)d\sigma(y) = 0$;

(5) $\displaystyle\sum_{j\in J_t} \|h_j\|_1 \leq 2\|f\|_1$.

DEMONSTRAÇÃO. Lembremos que $E_t = \bigcup_{j\in J_t} Q_{j,t}$. Então, pelo Corolário 1.9, para quase todo $x \notin E_t$, temos

$$| g(x) | = | f(x) | \leq M_d f(x) \leq t.$$

Se $x \in E_t$, então existe $j \in J_t$ tal que $x \in Q_{j,t}$ e assim

$$| g(x) | = \left| \frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} f(y) d\sigma(y) \right| \leq 8t,$$

e, portanto, (1) está demonstrado.

Agora temos

$$\begin{aligned}
\|g\|_1 &= \int_{E_t^c} | g(y) | d\sigma(y) + \int_{E_t} | g(y) | d\sigma(y) \\
&= \int_{E_t^c} | f(y) | d\sigma(y) + \sum_{j\in J_t} \left| \int_{Q_{j,t}} f(y) d\sigma(y) \right| \\
&\leq \int_{E_t^c} | f(y) | d\sigma(y) + \sum_{j\in J_t} \int_{Q_{j,t}} | f(y) | d\sigma(y) \\
&= \int_{E_t^c} | f(y) | d\sigma(y) + \int_{E_t} | f(y) | d\sigma(y) = \|f\|_1,
\end{aligned}$$

o que demonstra (2).

As propriedades (3) e (4) seguem imediatamente da definição de h_j. Agora,

$$\begin{aligned}
\|h_j\|_1 &\leq \int_{Q_{j,t}} | f(x) - f_{Q_{j,t}} | d\sigma(x) \\
&\leq \int_{Q_{j,t}} | f(x) | d\sigma(x) + \int_{Q_{j,t}} | f_{Q_{j,t}} | d\sigma(x) \\
&\leq \int_{Q_{j,t}} | f(x) | d\sigma(x) + \sigma(Q_{j,t}) | f |_{Q_{j,t}} \\
&= \int_{Q_{j,t}} | f(x) | d\sigma(x) + \sigma(Q_{j,t}) \frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} | f(x) | d\sigma(x) \\
&\leq 2 \int_{Q_{j,t}} | f(x) | d\sigma(x),
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\sum_{j\in J_t} \|h_j\|_1 \leq 2 \sum_{j\in J_t} \int_{Q_{j,t}} | f(x) | d\sigma(x) \leq 2\|f\|_1,$$

o que demonstra (5).

CAPÍTULO III

PESOS DO TIPO DIÁDICO DA CLASSE $A_p(\mathcal{A})$

O objetivo deste capítulo é definir e estudar os pesos da classe $A_p(\mathcal{A})$, $1 \leq p \leq \infty$, e demonstrar a limitação do operador maximal de Hardy-Littlewood sobre $L^p_w(S^2)$, com $1 < p < \infty$ e w na classe de Muckenhoupt $A_p(S^2)$. Este resultado, no caso da $I\!R^n$, foi demonstrado pela primeira vez em Muckenhoupt [13]; no caso de S^2 com $w \equiv 1$ em Rauch [15], e com $w \in A_p(S^2)$ em Calderón [4].

A classe $A_p(\mathcal{A})$ é análoga à classe A_p (diádica) de pesos sobre $[0,1]$ ou S^1. Os pesos da classe $A_p(\mathcal{A})$ podem ser vistos como pesos para martingais quando se considera a seqüência de σ-álgebras $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$, onde $\mathcal{F}_k$ é a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}_k$. Os resultados aqui apresentados, assim como os resultados para pesos diádicos sobre $[0,1]$, podem ser encontrados na Teoria dos Martingais (ver Izumiaza-Kazamaki [12] e Tozoni [22]), mas, em nossas demonstrações, fazemos uso de idéias contidas nas demonstrações de resultados análogos para pesos da classe de Muckenhoupt $A_p(I\!R^n)$, os quais podem ser encontrados no Capítulo IV de Garcia-Cuerva e Rubio de Francia [10], Capítulo IX de Torchinsky [20] e em Coifman-Fefferman [6].

Na primeira seção apresentamos as definições essenciais para a obtenção dos resultados do restante do capítulo.

Na segunda seção definimos o que vem a ser um peso do tipo diádico da classe $A_p(\mathcal{A})$, para $1 \leq p < \infty$. O Teorema 2.3 nos dá caracterizações dos pesos da classe $A_p(\mathcal{A})$.

Na terceira seção definimos a classe de pesos do tipo $A_\infty(\mathcal{A})$. O resultado principal desta seção é o Teorema 3.10, o qual nos dá caracterizações dos pesos da classe $A_\infty(\mathcal{A})$.

Na quarta seção estudamos as relações entre os pesos da classe $A_p(\mathcal{A})$, definida na Seção 2, e os pesos da classe de Muckenhoupt $A_p(S^2)$; e desigualdades entre o operador maximal do tipo diádico, definido no Capítulo II, e o operador maximal de Hardy-Littlewood. Demonstramos que o operador de Hardy-Littlewood é limitado sobre $L^p_w(S^2)$ utilizando a limitação do operador maximal do tipo diádico sobre $L^p_w(S^2)$. A técnica usada na demonstração desse resultado foi desenvolvida por Bordin e Tozoni em [1]. A mesma técnica, no caso do $\mathbb{R}^n$, foi desenvolvida por Fefferman e Stein em [7] e também pode ser encontrada em Bourgain [3] e Tozoni [22].

1. DEFINIÇÕES BÁSICAS

1.1. DEFINIÇÃO. Um peso sobre S^2 é uma função integrável w, definida em S^2, que toma valores em $[0,\infty]$.

1.2. OBSERVAÇÃO. Convecionaremos a seguinte multiplicação em $[0,\infty] : \infty \cdot t = t \cdot \infty = \infty, \forall t \in (0,\infty); 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$. E ainda $0^{-1} = \infty$ e $\infty^{-1} = 0$. Se w é um peso, denotamos $w^{-1}(x) = \dfrac{1}{w(x)}$.

1.3. NOTAÇÃO. Seja w um peso e seja E um subconjunto mensurável de S^2. Denotaremos $w(E) = \int_E w(x)d\sigma(x)$.

1.4. DEFINIÇÃO. Sejam w um peso e f uma função real e mensurável definida em S^2. Dizemos que $f \in L^p_w(S^2)$ se:

$$(1) \qquad \|f\|_{p,w} = \left(\int_{S^2} | f(x) |^p \, w(x)d\sigma(x)\right)^{1/p} < \infty, \quad \text{se } \ 0 < p < \infty;$$

$$(2) \qquad \|f\|_{p,w} = sup\{t > 0 : w(\{x \in S^2 :| f(x) |> t\}) > 0\} < \infty, \quad \text{se } \ p = \infty.$$

1.5. OBSERVAÇÃO. Se $f = g$ q.s. em S^2, então f e g são identificadas como sendo a mesma função em $L^p_w(S^2)$. Dessa forma, a aplicação $f \mapsto \|f\|_{p,w}$ é uma norma em $L^p_w(S^2)$, se $1 \leq p \leq \infty$; e, com esta norma, $L^p_w(S^2)$ é um espaço de Banach.

1.6. DEFINIÇÃO. Seja w um peso, e seja T uma aplicação de $L^p_w(S^2)$ em $L^q_w(S^2)$, com $1 \leq p, q \leq \infty$. Dizemos que T é do tipo (p,q) com respeito a w se, para toda $f \in L^p_w(S^2)$,

$$(1) \qquad \|Tf\|_{q,w} \leq A\|f\|_{p,w},$$

onde A é uma constante que não depende de f. Se $q < \infty$, dizemos que T é do tipo fraco (p,q) com respeito a w se

$$(2) \qquad w(\{x :| Tf(x) |> \alpha\}) \leq \left(\frac{A\|f\|_{p,w}}{\alpha}\right)^q,$$

para todo $\alpha > 0$ e toda $f \in L^p_w(S^2)$, onde A é uma constante que não depende de f. Se $q = \infty$, dizemos que T é do tipo fraco (p,q) com respeito a w se for do tipo (p,q).

Observamos que em (1) e (2) basta tomar $f \in L^\infty_w(S^2)$, já que $L^\infty_w(S^2)$ é denso em $L^p_w(S^2)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$.

1.7. OBSERVAÇÃO. A noção de tipo (p,q) com respeito a w é mais forte que a noção de tipo fraco (p,q) com respeito a w. De fato, se $q < \infty$ e $\alpha > 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\alpha^q w(\{x : \mid Tf(x) \mid > \alpha\}) &= \alpha^q \int_{\{x:|Tf(x)|>\alpha\}} w(x)d\sigma(x) \\
&\leq \int_{\{x:|Tf(x)|>\alpha\}} \mid Tf(x) \mid^q w(x)d\sigma(x) \\
&\leq \int_{S^2} \mid Tf(x) \mid^q w(x)d\sigma(x) \\
&= \|Tf\|^q_{q,w} \leq A\|f\|^q_{p,w}.
\end{aligned}$$

1.8. DEFINIÇÃO. Seja $f : S^2 \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se Q é um subconjunto de S^2, definimos

$$\inf_Q ess\, f = inf\{t > 0 : \sigma(\{x \in Q : f(x) < t\}) > 0\}$$

e

$$\sup_Q ess\, f = sup\{t > 0 : \sigma(\{x \in Q : f(x) > t\}) > 0\}.$$

2. PESOS DA CLASSE $A_p(\mathcal{A})$

2.1. DEFINIÇÃO. Dizemos que o peso w satisfaz a condição $A_p(\mathcal{A})$, ou que $w \in A_p(\mathcal{A})$, se existe $C > 0$ tal que :

(1) $$M_d w(x) \leq C w(x), \text{ para quase todo } x \in S^2, \text{ se } p = 1;$$

(2) $$\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right)\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1} \leq C,$$

para todo $Q \in \mathcal{A}$, se $1 < p < \infty$.

As menores constantes C que satisfazem (1) e (2) serão denotadas por $C(p,w)$.

2.2. LEMA. Seja $f \in L^1(S^2)$ tal que $f \geq 0$. Se w é um peso, então dado $t > 0$, temos:

$$w(\{x : M_d f(x) > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_{S^2} f(x) M_d w(x) d\sigma(x). \tag{1}$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in L^1(S^2), f \geq 0$. Dado $t > 0$, por II-1.4. existe uma família $\{Q_{j,t}\}_{j \in J_t}$ de elementos do tipo diádico não sobrepostos tal que, para cada $j \in J_t$,

$$t < \frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} f(x) d\sigma(x) \leq 8t$$

e também

$$\{x \in S^2 : M_d f(x) > t\} = \bigcup_{j \in J_t} Q_{j,t}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
w(\{x \in S^2 : M_d f(x) > t\}) &= \int_{\{x \in S^2 : M_d f(x) > t\}} w(x) d\sigma(x) \\
&= \sum_{j \in J_t} \int_{Q_{j,t}} w(x) d\sigma(x) \\
&\leq \sum_{j \in J_t} \frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} w(x) d\sigma(x) \frac{1}{t} \int_{Q_{j,t}} f(x) d\sigma(x) \\
&= \frac{1}{t} \sum_{j \in J_t} \int_{Q_{j,t}} f(x) \Big(\frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} w(y) d\sigma(y) \Big) d\sigma(x) \\
&\leq \frac{1}{t} \sum_{j \in J_t} \int_{Q_{j,t}} f(x) M_d w(x) d\sigma(x) \\
&\leq \frac{1}{t} \int_{S^2} f(x) M_d w(x) d\sigma(x).
\end{aligned}$$

2.3. TEOREMA. Seja w um peso, e seja $1 \leq p < \infty$. As seguintes condições são equivalentes:

(a) M_d é do tipo fraco (p, p) com respeito a w;

(b) Existe uma constante C tal que, para toda função mensurável e não-negativa $f : S^2 \to I\!R$ e todo $Q \in \mathcal{A}$, temos

$$\Big(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q f(x) d\sigma(x) \Big)^p w(Q) \leq C \int_Q f(x)^p w(x) d\sigma(x);$$

(c) w é um peso da classe $A_p(\mathcal{A})$.

Além disso, $w \in A_1(\mathcal{A})$ se e somente se existe uma constante C tal que, para todo $Q \in \mathcal{A}$,

$$\Big(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\Big)\operatorname*{supess}_Q w^{-1} \leq C.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar inicialmente que $w \in A_1(\mathcal{A})$ se e somente se existe uma constante C tal que, para todo $Q \in \mathcal{A}$, temos

$$(1) \qquad \Big(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\Big)\operatorname*{sup\,\mathit{ess}}_Q w^{-1} \leq C.$$

Vamos, então, supor que exista uma constante C tal que (1) seja válido para todo $Q \in \mathcal{A}$. Como $\operatorname*{inf\mathit{ess}}_Q w = (\operatorname*{sup\mathit{ess}}_Q w^{-1})^{-1} \geq 0$, temos

$$(2) \qquad \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x) \leq C\operatorname*{inf\mathit{ess}}_Q w \leq Cw(x),$$

para quase todo $x \in Q$. Mas esta desigualdade é equivalente a

$$(3) \qquad M_d w(x) \leq Cw(x),$$

para quase todo $x \in S^2$. De fato, é claro que (3) implica (2) para todo $Q \in \mathcal{A}$ e quase todo $x \in Q$. Reciprocamente, se temos (2) vamos mostrar que (3) também vale, isto é, vamos mostrar que o conjunto $K = \{x \in S^2 : M_d w(x) > Cw(x)\}$ tem medida zero. Se $M_d w(x) > Cw(x)$, então existe $Q \in \mathcal{A}$ tal que $x \in Q$ e

$$\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x) > Cw(x).$$

Então, por (2), o conjunto K está contido numa união enumerável ($\mathcal{A}$ é enumerável) de conjuntos de medida zero e, portanto, tem medida zero. Logo, (2) e (3) são equivalentes. Como (1) e (2) são equivalentes, temos a equivalência entre (1) e (3).

Vamos demonstrar agora que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

(a) $\Rightarrow$ **(b)**: Suponhamos que M_d é do tipo fraco (p,p) com respeito a w. Seja $f : S^2 \to I\!R$ mensurável e não-negativa. Se $Q \in \mathcal{A}$ é tal que $\int_Q f(x)d\sigma(x) = 0$, não há o que demonstrar. Então, seja Q um elemento do tipo diádico tal que

$$f_Q = \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q f(x)d\sigma(x) > 0.$$

Temos que $f_Q \leq M_d(f\chi_Q)(x)$, para todo $x \in Q$. De fato,

$$\begin{aligned}
f_Q &\le \sup_{\substack{x\in Q'\\ Q'\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q')}\int_{Q'\cap Q} f(x)d\sigma(x)\\
&= \sup_{\substack{x\in Q'\\ Q'\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q')}\int_{Q'} f(x)\chi_Q(x)d\sigma(x)\\
&= M_d(f\chi_Q)(x).
\end{aligned}$$

Então, para todo t, com $0 < t < f_Q$, temos

$$Q \subset E_t = \{x \in S^2 : M_d(f\chi_Q)(x) > t\}$$

e daí, por (a), temos

$$\begin{aligned}
w(Q) &\le w(E_t)\\
&\le \frac{C}{t^p}\int_{S^2}(f(x)\chi_Q(x))^p w(x)d\sigma(x)\\
&= \frac{C}{t^p}\int_Q f(x)^p w(x)d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Disso segue que

$$t^p w(Q) \le C\int_Q f(x)^p w(x)d\sigma(x).$$

Como esta desigualdade vale para todo $t < f_Q$, temos

$$(f_Q)^p w(Q) \le C\int_Q f(x)^p w(x)d\sigma(x).$$

Portanto, a desigualdade em (b) é válida para toda $f \ge 0$ e todo $Q \in \mathcal{A}$.

(b) $\Rightarrow$ **(c)**: Agora, vamos supor (b) satisfeita. Se $Q \in \mathcal{A}$, e S é um subconjunto mensurável de Q, podemos trocar f em (b) por $f\chi_S$, o que nos dá

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_S f(x)d\sigma(x)\right)^p w(Q) \le C\int_S f(x)^p w(x)d\sigma(x). \tag{4}$$

Para $f(x) \equiv 1$, a desigualdade acima se torna

$$\left(\frac{\sigma(S)}{\sigma(Q)}\right)^p w(Q) \le Cw(S). \tag{5}$$

De (5) podemos obter a seguinte informação sobre w:

$w(x) > 0$ para quase todo $x \in S^2$. De fato, se $w(x) = 0$ sobre algum conjunto S com $\sigma(S) > 0$, então (5) implica que $w(Q) = 0$ para todo elemento do tipo diádico Q contendo S e, conseqüentemente, $w(x) = 0$ para quase todo $x \in S^2$, obtendo assim um caso trivial, o qual vamos excluir.

Vamos, inicialmente, supor $p = 1$. Então podemos escrever (5) como

$$\frac{1}{\sigma(Q)} w(Q) \leq \frac{C}{\sigma(S)} w(S),$$

ou seja,

$$\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q w(x) d\sigma(x) \leq \frac{C}{\sigma(S)} \int_S w(x) d\sigma(x), \tag{6}$$

onde esta última desigualdade é válida para todo $Q \in \mathcal{A}$ e todo $S \subset Q$ mensurável, com $\sigma(S) > 0$. Fixemos $Q \in \mathcal{A}$, e seja $a > \inf\limits_{Q} ess\ w$. Então $S_a = \{x \in Q : w(x) < a\}$ é tal que $\sigma(S_a) > 0$ e, assim, (6) vale para $S = S_a$, o que nos dá

$$\frac{w(Q)}{\sigma(Q)} \leq \frac{C}{\sigma(S_a)} \int_{S_a} w(x) d\sigma(x) \leq \frac{C}{\sigma(S_a)} \int_{S_a} a d\sigma(x) = Ca.$$

Como isto é válido para todo $a > \inf\limits_{Q} ess\ w$, finalmente temos

$$\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q w(x) d\sigma(x) = \frac{w(Q)}{\sigma(Q)} \leq C \inf_{Q} ess\ w. \tag{7}$$

Lembrando que $\inf\limits_{Q} ess\ w = (\sup\limits_{Q} ess\ w^{-1})^{-1}$, podemos reescrever (7) como

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q w(x) d\sigma(x) \right) \sup_{Q} ess\ w^{-1} \leq C,$$

e assim demonstramos que (b) $\Rightarrow$ (c) para $p = 1$.

Vamos supor agora $1 < p < \infty$. Se (4) é válido para toda função $f \geq 0$, todo $Q \in \mathcal{A}$ e todo $S \subset Q$ mensurável, vamos escolher $f \geq 0$ de tal forma que $f(x) = f(x)^p w(x)$, isto é, $f(x) = w(x)^{\frac{-1}{p-1}}$. Fixemos $Q \in \mathcal{A}$ e tomemos $S = S_j = \{x \in Q : w(x) > 1/j\}$, para $j = 1, 2, \cdots$. Então f é limitada sobre todo S_j, pois em S_j temos que $w(x) > 1/j$. Portanto $0 \leq f(x) = 1/w(x)^{\frac{1}{p-1}} < j^{\frac{1}{p-1}}$, para todo $x \in S_j$. Logo, $\int_{S_j} f < \infty$. Com esta escolha de f e de (1), temos

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_{S_j} w(x)^{\frac{-1}{p-1}} d\sigma(x) \right)^p \frac{w(Q)}{\sigma(Q)} \leq \frac{C}{\sigma(Q)} \int_{S_j} w(x)^{\frac{-1}{p-1}} d\sigma(x),$$

ou, como as integrais são finitas, dividindo ambos os membros por $\dfrac{1}{\sigma(Q)}\displaystyle\int_{S_j} w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)$, encontramos

$$(8) \qquad \left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_{S_j} w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right) \le C.$$

Agora, $S_1 \subset S_2 \subset \cdots$, $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j = \{x \in Q : w(x) > 0\}$ e o complemento de $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ em Q tem medida zero, como já foi observado. Assim, fazendo $j \to \infty$ em (8) temos, finalmente, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right) \le C,$$

o que demonstra que (b) $\Rightarrow$ (c) para $1 < p < \infty$.

(c) $\Rightarrow$ **(a)**: Vamos demonstrar inicialmente o caso $p = 1$. Dada $f \in L^1(S^2)$ e dado $t > 0$, segue pelo Lema 2.2 e por (3) que

$$\begin{aligned} w(\{x \in S^2 : M_d f(x) > t\}) &= \frac{1}{t}\int_{S^2} | f(x) | M_d w(x) d\sigma(x) \\ &\le \frac{C}{t}\int_{S^2} | f(x) | w(x) d\sigma(x), \end{aligned}$$

o que mostra que (c) $\Rightarrow$ (a) para o caso $p = 1$.

Vamos demonstrar agora o caso $1 < p < \infty$. Suponhamos que $w \in A_p(\mathcal{A})$ e $f \in L^1(S^2)$. Para todo elemento $Q \in \mathcal{A}$, usando a desigualdade de Hölder com p e seu conjugado $p' = p/(p-1)$, temos:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q | f(x) | w(x)^{1/p} w(x)^{-1/p} d\sigma(x) \le \\ &\qquad \le \left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q | f(x) |^p w(x) d\sigma(x)\right)^{1/p}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q | f(x) | d\sigma(x)\right)^p w(Q) \le \\ &\qquad \le \frac{w(Q)}{\sigma(Q)}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1}\int_Q | f(x) |^p w(x) d\sigma(x) \\ &\qquad \le C\int_Q | f(x) |^p w(x) d\sigma(x), \end{aligned}$$

para todo $Q \in \mathcal{A}$. Queremos estimar $w(E_t)$. Por II-1.4. temos que $E_t = \bigcup_{j \in J_t} Q_{j,t}$, onde

$$(10) \qquad t < \frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} | f(x) | \, d\sigma(x).$$

Portanto, por (9) e (10), temos

$$\begin{aligned} w(E_t) &= \sum_{j \in J_t} w(Q_{j,t}) \\ &\leq C \sum_{j \in J_t} \left(\frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} | f(x) | \, d\sigma(x) \right)^{-p} \int_{Q_{j,t}} | f(x) |^p \, w(x) d\sigma(x) \\ &\leq \frac{C}{t^p} \sum_{j \in J_t} \int_{Q_{j,t}} | f(x) |^p \, w(x) d\sigma(x) \\ &\leq \frac{C}{t^p} \int_{S^2} | f(x) |^p \, w(x) d\sigma(x), \end{aligned}$$

o que mostra que (c) $\Rightarrow$ (a).

2.4. OBSERVAÇÃO. A condição $A_1(\mathcal{A})$ pode ser obtida como um caso limite da condição $A_p(\mathcal{A})$ quando $p \downarrow 1$. De fato, temos

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} d\sigma(x) \right)^{p-1} = \frac{1}{\sigma(Q)^{p-1}} \|w^{-1}\|_{L^{\frac{1}{p-1}}(Q)} \to \|w^{-1}\|_{L^\infty(Q)}$$

quando $p \downarrow 1$. Agora, $\|w^{-1}\|_{L^\infty(Q)} = \operatorname{supess}_Q w^{-1}$. Logo, obtemos a condição $A_1(\mathcal{A})$ da condição $A_p(\mathcal{A})$, para $1 < p < \infty$, fazendo $p \downarrow 1$.

2.5. COROLÁRIO. Seja $w \in A_p(\mathcal{A})$. Então, para todo q com $p < q < \infty$, existe uma constante C tal que, para toda $f \in L^1(S^2)$, temos

$$\int_{S^2} (M_d f(x))^q w(x) d\sigma(x) \leq C \int_{S^2} | f(x) |^q \, w(x) d\sigma(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Do Teorema 2.3 segue que, se $w \in A_p(\mathcal{A})$, então M_d é do tipo fraco (p,p) com respeito a w. Vamos, agora, mostrar que M_d também é do tipo fraco (∞, ∞) com respeito a w. Isto é conseqüência do seguinte fato:

$$\|M_d f\|_{\infty,w} = \|M_d f\|_\infty \leq \|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,w}$$

As igualdades acima seguem do fato que as medidas σ e w são absolutamente contínuas, uma com respeito à outra, já que $0 < w < \infty$ q.s.. A desigualdade vem do fato que

$$M_d f(x) = \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q | f(y) | \, d\sigma(y) \leq \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \|f\|_\infty d\sigma(y) = \|f\|_\infty,$$

para quase todo $x \in S^2$. Daí, temos que $\|M_d f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Portanto, M_d também é do tipo fraco (∞, ∞). Logo, pelo Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz, M_d é do tipo (q, q), para todo $p < q < \infty$, isto é.

$$\int_{S^2} | M_d f(x) |^q \, w(x) d\sigma(x) \leq C \int_{S^2} | f(x) |^q \, w(x) d\sigma(x).$$

3. PESOS DA CLASSE $A_\infty(\mathcal{A})$

3.1 DEFINIÇÃO. Dizemos que um peso w pertence à classe $A_\infty(\mathcal{A})$ se existem $\delta > 0$ e $C > 0$ tais que, se $Q \in \mathcal{A}$ e $A \subset Q$ é um subconjunto mensurável, então

$$\frac{w(A)}{w(Q)} \leq C\Big(\frac{\sigma(A)}{\sigma(Q)}\Big)^\delta.$$

3.2. TEOREMA. Seja μ_1 uma medida sobre S^2 absolutamente contínua com respeito a σ, e seja w um peso em $L^1(S^2, \mu_1)$. Seja μ_2 outra medida sobre S^2 tal que $d\mu_2 = w(x) d\mu_1(x)$. Suponhamos que exista $K > 0$, tal que, para todos $Q_k \in \mathcal{A}_k$ e $Q_{k+1} \in \mathcal{A}_{k+1}$ com $Q_{k+1} \subset Q_k$, temos $\mu_1(Q_k) \leq K\mu_1(Q_{k+1})$. Então, as seguintes condições são equivalentes:

(a) Existem $\delta > 0$ e $C > 0$ tais que, para todo $Q \in \mathcal{A}$ e todo subconjunto mensurável $A \subset Q$, temos

$$\frac{\mu_2(A)}{\mu_2(Q)} \leq C\Big(\frac{\mu_1(A)}{\mu_1(Q)}\Big)^\delta.$$

(b) Existem constantes α e β, com $0 < \alpha, \beta < 1$, tais que, para todo $Q \in \mathcal{A}$ e todo subconjunto mensurável $A \subset Q$ com $\mu_1(A) \leq \alpha\mu_1(Q)$ temos que $\mu_2(A) \leq \beta\mu_2(Q)$.
(c) Existem constantes α' e β', com $0 < \alpha', \beta' < 1$, tais que, para todo $Q \in \mathcal{A}$ e todo subconjunto mensurável $A \subset Q$ com $\mu_2(A) \leq \alpha'\mu_2(Q)$ temos que $\mu_1(A) \leq \beta'\mu_1(Q)$.
(d) Existem $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tais que, para todo $Q \in \mathcal{A}$, temos

$$\Big(\frac{1}{\mu_1(Q)} \int_Q w(x)^{1+\varepsilon} d\mu_1(x)\Big)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{\mu_1(Q)} \int_Q w(x) d\mu_1(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Vamos demonstrar (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c), (b) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b): Vamos supor que (a) seja válido e que $\mu_1(A)/\mu_1(Q) \le \alpha < 1$, onde $Q \in \mathcal{A}$ e $A \subset Q$ é um subconjunto mensurável. Então,

$$\frac{\mu_2(A)}{\mu_2(Q)} \le C\left(\frac{\mu_1(A)}{\mu_1(Q)}\right)^{\delta} \le C\alpha^{\delta}.$$

Tomemos $\alpha < 1$ de tal forma que $C\alpha^{\delta} < 1$. Então, (b) vale com as constantes α e $\beta = C\alpha^{\delta}$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Vamos supor (b). Seja $A \subset Q$ mensurável tal que $\mu_2(A)/\mu_2(Q) \le (1-\beta)/2 < 1-\beta$. Então,

$$\frac{\mu_2(Q \setminus A)}{\mu_2(Q)} = \frac{\mu_2(Q) - \mu_2(A)}{\mu_2(Q)} > \beta.$$

Como $Q \setminus A \subset Q$ é subconjunto mensurável, por (b) temos que $\mu_1(Q \setminus A)/\mu_1(Q) > \alpha$. Mas

$$\frac{\mu_1(Q \setminus A)}{\mu_1(Q)} = \frac{\mu_1(Q) - \mu_1(A)}{\mu_1(Q)}.$$

Logo, $\mu_1(A)/\mu_1(Q) \le 1 - \alpha$, o que demonstra (c) para $\alpha' = (1-\beta)/2$ e $\beta' = 1 - \alpha$.

(c) $\Rightarrow$ (b): A demonstração é inteiramente análoga à (b) $\Rightarrow$ (c).

(b) $\Rightarrow$ (d): Vamos supor que (b) seja válido. Fixemos $Q \in \mathcal{A}$ e vamos mostrar (d) com ε e C independentes de Q. Vamos tomar uma seqüência crescente $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots$ com $\lambda_0 = w_Q = \frac{1}{\mu_1(Q)}\int_Q w(x)d\mu_1(x)$. Para cada λ_k, vamos fazer uma decomposição de Calderón-Zygmund de Q com relação à função w. Isto é, consideraremos a família $\{Q_{j,k}\}_{j\in J_k}$ de elementos do tipo diádico maximais contidos em Q, de tal forma que para todo $j \in J_k$ temos

$$\lambda_k < w_{Q_{j,k}} = \frac{1}{\mu_1(Q_{j,k})}\int_{Q_{j,k}} w(x)d\mu_1(x) \le K_1\lambda_k.$$

E ainda, se $x \notin D_k = \bigcup_{j\in J_k} Q_{j,k}$, temos $w(x) \le \lambda_k$. Tal família existe por II-1.4. Como $\lambda_{k+1} > \lambda_k$, cada $Q_{j,k+1}$ está contido em $Q_{i,k}$, para algum i. Portanto, $D_{k+1} \subset D_k$. Agora, como μ_1 é absolutamente contínua com respeito a σ,

$$
\begin{aligned}
K_1\lambda_k &\geq \frac{1}{\mu_1(Q_{i,k})}\int_{Q_{i,k}} w(x)d\mu_1(x) \\
&\geq \frac{1}{\mu_1(Q_{i,k})}\int_{Q_{i,k}\cap D_{k+1}} w(x)d\mu_1(x) \\
&= \frac{1}{\mu_1(Q_{i,k})}\sum_{Q_{j,k+1}\subset Q_{i,k}}\int_{Q_{j,k+1}} w(x)d\mu_1(x) \\
&> \frac{1}{\mu_1(Q_{i,k})}\sum_{Q_{j,k+1}\subset Q_{i,k}}\lambda_{k+1}\mu_1(Q_{j,k+1}) \\
&= \frac{\lambda_{k+1}\mu_1(Q_{i,k}\cap D_{k+1})}{\mu_1(Q_{i,k})}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\frac{\mu_1(Q_{i,k}\cap D_{k+1})}{\mu_1(Q_{i,k})} < \frac{K_1\lambda_k}{\lambda_{k+1}}.
$$

Tomemos a seqüência (λ_k) de forma que $\alpha = K_1\lambda_k/\lambda_{k+1} < 1$, isto é, $\lambda_{k+1} = K_1\alpha^{-1}\lambda_k$, $\lambda_k = (K_1\alpha^{-1})^k\lambda_0$. Então, de (b) temos que $\mu_2(Q_{i,k}\cap D_{k+1}) \leq \beta\mu_2(Q_{i,k})$ e, somando sobre i, obtemos $\mu_2(D_{k+1}) \leq \beta\mu_2(D_k)$, pois μ_2 é absolutamente contínua com respeito a σ, já que $d\mu_2(x) = w(x)d\mu_1(x)$ e μ_1 é absolutamente contínua com respeito a σ. Portanto, $\mu_2(D_k) \leq \beta^k\mu_2(D_0)$. Ainda, $\mu_1(D_{k+1}) \leq \mu_1(D_k)$ e, assim, $\mu_1(D_k) \leq \alpha^k\mu_1(D_0)$. Isto implica que

$$
\mu_1\Big(\bigcap_{k=0}^{\infty} D_k\Big) = \lim_{k\to\infty}\mu_1(D_k) = 0.
$$

E daí, como $w(x) \leq \lambda_k$ se $x \notin D_k$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_Q w(x)^{1+\varepsilon}d\mu_1(x) &= \int_{Q\setminus D_0} w(x)^{1+\varepsilon}d\mu_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{D_k\setminus D_{k+1}} w(x)^{1+\varepsilon}d\mu_1(x) \\
&= \int_{Q\setminus D_0} w(x)\cdot w(x)^{\varepsilon}d\mu_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{D_k\setminus D_{k+1}} w(x)w(x)^{\varepsilon}d\mu_1(x) \\
&\leq \lambda_0^{\varepsilon}\int_{Q\setminus D_0} w(x)d\mu_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{k+1}^{\varepsilon}\int_{D_k\setminus D_{k+1}} w(x)d\mu_1(x) \\
&= \lambda_0^{\varepsilon}\mu_2(Q\setminus D_0) + \lambda_0^{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}(K_1\alpha^{-1})^{(k+1)\varepsilon}\mu_2(D_k\setminus D_{k+1}) \\
&\leq \lambda_0^{\varepsilon}\Big(\mu_2(Q\setminus D_0) + \sum_{k=0}^{\infty}(K_1\alpha^{-1})^{(k+1)\varepsilon}\mu_2(D_k)\Big) \\
&\leq \lambda_0^{\varepsilon}\Big(\mu_2(Q\setminus D_0) + (K_1\alpha^{-1})^{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}(K_1\alpha^{-1})^{k\varepsilon}\beta^k\mu_2(D_0)\Big).
\end{aligned}
$$

Tomando ε suficientemente pequeno, temos $(K_1\alpha^{-1})^\varepsilon\beta < 1$, e a série acima será convergente. Se $M = (K_1\alpha^{-1})^\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}((K_1\alpha^{-1})^\varepsilon\beta)^k$ e $C = max\{1, M\}$, temos

$$\begin{aligned}\int_Q w(x)^{1+\varepsilon}d\mu_1(x) &\leq \lambda_0^\varepsilon(\mu_2(Q\setminus D_0) + M\mu_2(D_0)) \\ &\leq \lambda_0^\varepsilon C(\mu_2(Q\setminus D_0) + \mu_2(D_0)) = Cw_Q^\varepsilon\mu_2(Q).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_1(Q)}\int_Q w(x)^{1+\varepsilon}d\mu_1(x) &\leq \frac{Cw_Q^\varepsilon}{\mu_1(Q)}\int_Q w(x)d\mu_1(x) \\ &= C\Big(\frac{1}{\mu_1(Q)}\int_Q w(x)d\mu_1(x)\Big)^{1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

(d) $\Rightarrow$ **(a)**: Vamos supor que (d) seja válido. Então, pela desigualdade de Hölder aplicada à $w(x)$ e $f(x) = 1$, com $p = 1+\varepsilon$ e $p' = (1+\varepsilon)/\varepsilon$, se $Q \in \mathcal{A}$, e A é um subconjunto mensurável de Q, temos

$$\begin{aligned}\mu_2(A) &= \int_A w(x)d\mu_1(x) \\ &\leq \Big(\frac{1}{\mu_1(Q)}\int_A w(x)^{1+\varepsilon}d\mu_1(x)\Big)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\mu_1(Q)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\mu_1(A)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \\ &\leq \Big(\frac{C}{\mu_1(Q)}\int_Q w(x)d\mu_1(x)\Big)\mu_1(Q)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\mu_1(A)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \\ &= C\mu_2(Q)\Big(\frac{\mu_1(A)}{\mu_1(Q)}\Big)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}},\end{aligned}$$

o que demonstra (a) para $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

3.3. LEMA. Seja $w \in A_p(\mathcal{A})$, para algum $1 \leq p < \infty$. Então, para todo $0 < \alpha < 1$, existe $0 < \beta < 1$ dependendo de α, tal que, se $Q \in \mathcal{A}$, e A é um subconjunto mensurável de Q, satisfazendo $\sigma(A) \leq \alpha\sigma(Q)$, então $w(A) \leq \beta w(Q)$.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Teorema 2.3, $w \in A_p(\mathcal{A})$ é equivalente a

$$\Big(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q f(x)d\sigma(x)\Big)^p w(Q) \leq C\int_Q f(x)^p w(x)d\sigma(x),$$

para toda função mensurável $f : S^2 \to \mathbb{R}$ com $f \geq 0$, todo $Q \in \mathcal{A}$ e alguma constante $C > 0$. Seja, então, $S \subset Q$ um subconjunto mensurável, e tomemos $f = \chi_S$. Então a desigualdade acima se torna

$$\left(\frac{\sigma(S)}{\sigma(Q)}\right)^p w(Q) \leq Cw(S).$$

Tomando $S = Q$ na desigualdade acima, obtemos $C \geq 1$. Dado $0 < \alpha < 1$, seja $A \subset Q$ mensurável tal que $\sigma(A) \leq \alpha\sigma(Q)$, e tomemos $S = Q \setminus A$. Então $-\sigma(A)/\sigma(Q) \geq -\alpha$ e assim

$$\begin{aligned} (1-\alpha)^p w(Q) &\leq \left(1 - \frac{\sigma(A)}{\sigma(Q)}\right)^p w(Q) \\ &= \left(\frac{\sigma(Q \setminus A)}{\sigma(Q)}\right)^p w(Q) \\ &\leq C(w(Q) - w(A)). \end{aligned}$$

Logo, $w(A) \leq C^{-1}(C - (1-\alpha)^p)w(Q)$, e o lema está demonstrado para $\beta = C^{-1}(C - (1-\alpha)^p) < 1$.

3.4. COROLÁRIO. Seja $w \in A_p(\mathcal{A})$, para $1 \leq p < \infty$. Então existe $\varepsilon > 0$ dependendo de p e da constante $C(p, w)$, e existe $K > 0$, tais que, para todo $Q \in \mathcal{A}$,

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q w(x)^{1+\varepsilon} d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{K}{\sigma(Q)} \int_Q w(x) d\sigma(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Se $w \in A_p(\mathcal{A})$, pelo Lema 3.3, dado $0 < \alpha < 1$, existe $0 < \beta < 1$ tal que, se $Q \in \mathcal{A}$ e A é um subconjunto mensurável de Q, satisfazendo $\sigma(A) \leq \alpha\sigma(Q)$, então $w(A) \leq \beta w(Q)$. Mas esta é a condição (b) do Teorema 3.2 para $\mu_1 = \sigma$ e $d\mu_2 = w d\sigma$. Portanto, por este mesmo teorema existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $Q \in \mathcal{A}$, temos

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q w(x)^{1+\varepsilon} d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{K}{\sigma(Q)} \int_Q w(x) d\sigma(x).$$

3.5. OBSERVAÇÃO. A desigualdade do Corolário 3.4 é chamada a Desigualdade de Hölder Inversa, pois a desigualdade oposta com $K = 1$ é um caso particular da desigualdade de Hölder para as funções w e $f \equiv 1, p = 1 + \varepsilon$ e $p' = (1+\varepsilon)/\varepsilon$.

3.6. LEMA. (a) Sejam $1 < p < q < \infty$. Então $A_1(\mathcal{A}) \subset A_p(\mathcal{A}) \subset A_q(\mathcal{A})$.

(b) Seja $1 < p < \infty$. Então $w \in A_p(\mathcal{A})$ se e somente se $w^{\frac{-1}{p-1}} \in A_{p'}(\mathcal{A})$, onde p' é o expoente conjugado de p, isto é, $p' = p/(p-1)$.

DEMONSTRAÇÃO. (a): Basta usarmos o Teorema 2.3 e observarmos que

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{q-1}}d\sigma(x)\right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1} \leq \operatorname*{supess}_Q w^{-1}.$$

A primeira desigualdade segue da desigualdade de Hölder aplicada às funções $w^{-1/(q-1)}$ e $f \equiv 1$, com $\overline{p} = (q-1)(p-1)^{-1} > 1$ e $\overline{p}' = (q-1)(q-p)^{-1}$. A segunda desigualdade segue de:

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1} \leq \left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q (\operatorname*{supess}_Q w(x)^{-1})^{\frac{1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1} = \operatorname*{supess}_Q w^{-1}.$$

(b): Suponhamos que $w \in A_p(\mathcal{A}), 1 < p < \infty$. Então existe $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right)\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1} \leq C.$$

Como $(p-1)(p'-1) = 1$, podemos reescrever a desigualdade acima como

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{\frac{p-1}{p-1}}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq C^{\frac{1}{p-1}}$$

e, daí,

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q (w(x)^{\frac{-1}{p-1}})^{\frac{-1}{p'-1}}d\sigma(x)\right)^{p'-1} \leq C^{p'-1}$$

e, portanto, $w^{\frac{-1}{p-1}} \in A_{p'}(\mathcal{A})$. A recíproca é inteiramente análoga.

3.7. COROLÁRIO. Se $w \in A_p(\mathcal{A})$ com $1 \leq p < \infty$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $w^{1+\varepsilon} \in A_p(\mathcal{A})$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $p = 1$ e $w \in A_p(\mathcal{A})$, pelo Corolário 3.4 existem $\varepsilon > 0$ e $K > 0$, tais que, se $Q \in \mathcal{A}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(y)^{1+\varepsilon}d\sigma(y) &\leq \left(\frac{K}{\sigma(Q)}\int_Q w(y)d\sigma(y)\right)^{1+\varepsilon} \\
&\leq K^{1+\varepsilon}(M_d w(x))^{1+\varepsilon} \\
&\leq K^{1+\varepsilon}K'^{1+\varepsilon}w(x)^{1+\varepsilon}
\end{aligned}$$

para quase todo $x \in Q$, onde a última desigualdade segue do fato de w pertencer à classe $A_1(\mathcal{A})$. Portanto, $M_d(w^{1+\varepsilon})(x) \leq Cw(x)^{1+\varepsilon}$, para quase todo $x \in S^2$ e, assim,

$w^{1+\varepsilon} \in A_1(\mathcal{A})$.

Se $p > 1$, basta tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (ver demonstração (b) $\Rightarrow$ (d) do Teorema 3.2) de tal forma que valham as desigualdades:

$$\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{1+\varepsilon}d\sigma(x) \leq \left(\frac{C}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right)^{1+\varepsilon}$$

e

$$\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{-\frac{(1+\varepsilon)}{p-1}}d\sigma(x) \leq \left(\frac{C'}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{1+\varepsilon},$$

que seguem do Corolário 3.4 aplicado à função w e à função $w^{\frac{-1}{p-1}}$, já que, pelo Lema 3.6, como $w \in A_p(\mathcal{A})$, temos que $w^{\frac{-1}{p-1}} \in A_{p'}(\mathcal{A})$. Neste caso,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{1+\varepsilon}d\sigma(x)\right)&\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{-\frac{(1+\varepsilon)}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1} \leq \\ &\leq \left(\left(\frac{C}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right)\left(\frac{C'}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1}\right)^{1+\varepsilon} \\ &\leq (C(C')^{p-1}K)^{1+\varepsilon}\end{aligned}$$

pois $w \in A_p(\mathcal{A})$. Logo, $w^{1+\varepsilon} \in A_p(\mathcal{A})$.

3.8. TEOREMA. Se $w \in A_p(\mathcal{A})$, com $1 < p < \infty$, então existe algum $q < p$ tal que $w \in A_q(\mathcal{A})$, isto é, para todo p, $1 < p < \infty$, temos $A_p(\mathcal{A}) = \bigcup_{q<p} A_q(\mathcal{A})$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $w \in A_p(\mathcal{A})$. Então, se $q < p$, o Lema 3.6 (a) nos garante que $A_q(\mathcal{A}) \subset A_p(\mathcal{A})$ e, portanto, $\bigcup_{q<p} A_q(\mathcal{A}) \subset A_p(\mathcal{A})$. Por outro lado, o Lema 3.6 (b) nos garante que $w^{\frac{-1}{p-1}} \in A_{p'}$. Assim, aplicando o Corolário 3.4 para o peso $w^{\frac{-1}{p-1}}$, encontramos $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tais que, para todo $Q \in \mathcal{A}$, temos

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{-\frac{(1+\varepsilon)}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x).$$

Mas $(1+\varepsilon)/(p-1) > 1/(p-1)$ implica que $(1+\varepsilon)/(p-1) = 1/(q-1)$ para algum $1 < q < p$. Então

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right)&\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{q-1}}d\sigma(x)\right)^{q-1} = \\ &= \left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right)\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{-\frac{(1+\varepsilon)}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{\frac{p-1}{1+\varepsilon}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right)C^{p-1}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq K.\end{aligned}$$

Logo, $w \in A_q(\mathcal{A})$ e, portanto, $A_p(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{q<p} A_q(\mathcal{A})$, o que demonstra o teorema.

3.9. TEOREMA. Seja w um peso sobre S^2 e seja $1 < p < \infty$. As seguintes condições são equivalentes:

(a) M_d é do tipo fraco (p,p) com respeito a w;

(b) Existe uma constante C tal que, para toda função mensurável e não-negativa $f : S^2 \to I\!R$ e todo $Q \in \mathcal{A}$, temos

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q f(x) d\sigma(x)\right)^p w(Q) \leq C \int_Q f(x)^p w(x) d\sigma(x);$$

(c) $w \in A_p(\mathcal{A})$;

(d) Existe uma constante C tal que, para toda $f \in L^p_w(S^2)$ temos

$$\int_{S^2} (M_d f(x))^p w(x) d\sigma(x) \leq C \int_{S^2} | f(x) |^p w(x) d\sigma(x),$$

isto é, M_d é do tipo (p,p) com respeito a w.

DEMONSTRAÇÃO. No Teorema 2.3 mostramos a equivalência entre (a), (b) e (c). Pela Observação 1.7 temos que (d) implica (a). Para concluir a demonstração do teorema, basta mostrar que (c) implica (d). Seja, então, $w \in A_p(\mathcal{A})$. Como $1 < p < \infty$, pelo Teorema 3.8 existe $q < p$ tal que $w \in A_q(\mathcal{A})$. Então w é do tipo fraco (q,q) com respeito a w e, como M_d é do tipo fraco (∞, ∞) com respeito a w (ver demonstração do Corolário 2.5), o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz nos dá que M_d é do tipo (p,p) com respeito a w, o que nos fornece (d).

3.10. TEOREMA. Seja w um peso e suponhamos que exista $K > 0$ tal que, para todos $Q_k \in \mathcal{A}_k$, $Q_{k+1} \in \mathcal{A}_{k+1}$ com $Q_{k+1} \subset Q_k$, temos $w(Q_k) \leq K w(Q_{k+1})$. São equivalentes:

(a) $w \in A_p(\mathcal{A})$ para algum $1 \leq p < \infty$;

(b) Existem $0 < \alpha, \beta < 1$ tais que $\sigma(A) \leq \alpha\sigma(Q)$ implica $w(A) \leq \beta w(Q)$ para todo $Q \in \mathcal{A}$ e todo $A \subset Q$ mensurável;

(c) Existem $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tais que, para todo $Q \in \mathcal{A}$,

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q w(x)^{1+\varepsilon} d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{\sigma(Q)} \int_Q w(x) d\sigma(x);$$

(d) $w \in A_\infty(\mathcal{A})$.

DEMONSTRAÇÃO. A implicação (a) $\Rightarrow$ (b) segue pelo Lema 3.3, e (b) $\Rightarrow$ (c) segue do Corolário 3.4. As implicações (c) $\Rightarrow$ (d) e (d) $\Rightarrow$ (b) seguem diretamente do Teorema 3.2 quando consideramos $d\mu_1(x) = d\sigma(x)$ e $d\mu_2(x) = w(x)d\sigma(x)$.

(b) $\Rightarrow$ **(a)**: Tomemos $d\mu_1(x) = w(x)d\sigma(x)$ e $d\mu_2 = d\sigma(x) = w^{-1}(x)d\mu_1(x)$. A condição (b) é a condição (c) do Teorema 3.2. Segue da hipótese sobre w que podemos aplicar o Teorema 3.2. Então, por 3.2(d), existem $\eta > 0$ e $K > 0$ tais que, para todo elemento do tipo diádico Q, temos

$$(1) \qquad \begin{aligned} \left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q (w(x)^{-1})^{1+\eta} w(x)d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{1+\eta}} &\leq \frac{K}{w(Q)}\int_Q w^{-1}(x)w(x)d\sigma(x) \\ &= K\frac{\sigma(Q)}{w(Q)}. \end{aligned}$$

Então, se tomarmos $p = (\eta+1)/\eta$ e seu conjugado $p' = \eta + 1$, aplicarmos a desigualdade de Hölder às funções $w^{-\eta}$ e w^{-1} com relação à medida $d\mu_1 = wd\sigma$ e usarmos (1), teremos:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{-\eta}d\sigma(x) = \\ &= \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{-\eta}w(x)^{-1}w(x)d\sigma(x) \\ &\leq \frac{1}{\sigma(Q)}\left(\int_Q w(x)^{-\eta\cdot\frac{(\eta+1)}{\eta}}d\mu_1(x)\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}\left(\int_Q (w(x)^{-1})^{1+\eta}d\mu_1(x)\right)^{\frac{1}{1+\eta}} \\ &= \frac{1}{\sigma(Q)}\left(\left(\frac{1}{(w(Q)}\int_Q (w(x)^{-1})^{1+\eta}w(x)d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{\eta+1}}\right)^{\eta+1} w(Q) \\ &\leq \frac{1}{\sigma(Q)}\left(\frac{K\sigma(Q))}{w(Q)}\right)^{\eta+1} w(Q) \\ &= K^{\eta+1}\frac{\sigma(Q)^\eta}{w(Q)^\eta}. \end{aligned}$$

Lembrando que $p = (\eta+1)/\eta > 1$, de (2) temos que

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right)\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1} \leq C,$$

isto é, $w \in A_p(\mathcal{A})$, para $p > 1$.

3.11. TEOREMA. Seja $w \in A_\infty(\mathcal{A})$ satisfazendo a seguinte condição: existe $K > 0$ tal que, se $Q_k \in \mathcal{A}_k$ e $Q_{k+1} \in \mathcal{A}_{k+1}$ com $Q_{k+1} \subset Q_k$, temos $w(Q_k) \leq Kw(Q_{k+1})$. Então existem $\delta > 0$ e $C > 0$ tais que, para todo $Q \in \mathcal{A}$ e todo $A \subset Q$ mensurável, temos

$$\frac{\sigma(A)}{\sigma(Q)} \leq C\Big(\frac{w(A)}{w(Q)}\Big)^\delta.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $Q \in A_\infty(\mathcal{A})$. Pelo Teorema 3.10 existem $0 < \alpha, \beta < 1$ tais que $\sigma(A) \leq \alpha\sigma(Q)$ implica $w(A) \leq \beta w(Q)$ para todo $Q \in \mathcal{A}$ e todo $A \subset Q$ mensurável. Então, se tomarmos no Teorema 3.2 $\mu_2 = \sigma, \mu_1 = w$ e o peso do enunciado deste teorema igual a w^{-1}, teremos, por 3.2(a), que existem constantes $\delta > 0$ e $C > 0$ tais que

$$\frac{\sigma(A)}{\sigma(Q)} \leq C\Big(\frac{w(A)}{w(Q)}\Big)^\delta,$$

para todo $Q \in \mathcal{A}$ e todo $A \subset Q$ mensurável.

4. DESIGUALDADE PARA PESOS DA CLASSE DE MUCKENHOUPT $A_p(S^2)$

4.1. DEFINIÇÃO. Seja w um peso e seja $1 < p < \infty$. Dizemos que w é um peso na classe de Muckenhoupt $A_p(S^2)$ (ou que $w \in A_p(S^2)$), se existe uma constante K tal que

$$(1) \qquad \Big(\frac{1}{\sigma(B_2'(x,\ell))}\int_{B_2'(x,\ell)} w(x)d\sigma(x)\Big)\Big(\frac{1}{\sigma(B_2'(x,\ell))}\int_{B_2'(x,\ell)} w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\Big)^{p-1} \leq K$$

para todo $\ell > 0$ e $x \in S^2$. Se $w \in A_p(S^2), 1 < p \leq \infty$, denotaremos por $K(p, w)$ a menor constante K que satisfaz (1).

4.2. DEFINIÇÃO. Seja $f \in L^1(S^2)$. Definimos os seguintes operadores maximais sobre S^2:

$$Mf(x) = \sup_{\ell>0}\frac{1}{\sigma(B_2'(x,\ell))}\int_{B_2'(x,\ell)} | f(y) | d\sigma(y)$$

e

$$M_1 f(x) = \sup_{B'}\frac{1}{\sigma(B')}\int_{B'} | f(y) | d\sigma(y),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as bolas $B' = B_2'(t,\ell)$, com $\ell > 0, t \in S^2$, tal que $x \in B_2'(t,\ell)$.

4.3. LEMA. Para todo $1 < p < \infty$, toda $f \in L^1(S^2)$ e todo $x \in S^2$, temos

$$(1) \qquad A_p(S^2) \subset A_p(\mathcal{A});$$

$$(2) \qquad M_d f(x) \leq 4\pi^2 M_1 f(x);$$

$$(3) \qquad M_1 f(x) \leq 4Mf(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. (1): Sejam $1 < p < \infty$ e $w \in \mathcal{A}_p(S^2)$. Se $Q \in \mathcal{A}$, por I-2.11(b), existem $t \in Q$ e $\ell > 0$ tais que $Q \subset B_2'(t,\ell)$ e $\sigma(B_2'(t,\ell)) \leq 4\pi^2\sigma(Q)$. Então, por 4.1(1) segue que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)d\sigma(x)\right)\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\right)^{p-1} \leq \\
&\qquad \leq (4\pi^2)^p \frac{1}{\sigma(B_2'(t,\ell))}\int_{B_2'(t,\ell)} w(x)d\sigma(x)\Big)\Big(\frac{1}{\sigma(B_2'(t,\ell))}\int_{B_2'(t,\ell)} w(x)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(x)\Big) \\
&\qquad \leq (4\pi^2)^p K(p,w).
\end{aligned}$$

Assim, $w \in A_p(\mathcal{A})$ e, portanto, $\mathcal{A}_p(S^2) \subset \mathcal{A}_p(\mathcal{A})$.

(2): Sejam $f \in L^1(S^2), x \in S^2$ e $Q \in \mathcal{A}$ tal que $x \in Q$. Então, pelo mesmo argumento utilizado na demonstração de (1), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \mid f(y) \mid d\sigma(y) &\leq \frac{4\pi^2}{\sigma(B_2'(t,\ell))}\int_{B_2'(t,\ell)} \mid f(y) \mid d\sigma(y) \\
&\leq 4\pi^2 M_1 f(x)
\end{aligned}$$

e, portanto, $M_d f(x) \leq 4\pi^2 M_1 f(x)$.

(3): Sejam $\ell > 0$ e $t > 0$. Se $x \in B_2'(t,\ell)$, então $B_2'(t,\ell) \subset B_2'(x,2\ell)$. Portanto, como $\sigma(B_2'(t,\ell)) = \pi\ell^2$ e $\sigma(B_2'(x,2\ell)) = 4\pi\ell^2$, temos que $\sigma(B_2'(x,2\ell)) = 4\sigma(B_2'(t,\ell))$. Daí,

$$\frac{1}{\sigma(B_2'(t,\ell))}\int_{B_2'(t,\ell)} \mid f(y) \mid d\sigma(y) \leq \frac{4}{\sigma(B_2'(x,2\ell))}\int_{B_2'(x,2\ell)} \mid f(y) \mid d\sigma(y) \leq 4Mf(x)$$

e, portanto, $M_1 f(x) \leq 4Mf(x)$.

4.4. TEOREMA. Seja $w \in A_p(S^2), 1 < p < \infty$. Existe uma constante K, dependendo somente de p e w, tal que, para toda $f \in L^p_w(S^2)$, temos

$$(1) \qquad \int_{S^2}(Mf(x))^p w(x)d\sigma(x) \leq K\int_{S^2} | f(x) |^p w(x)d\sigma(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\ell > 0$ e $x \in S^2$. Por I-2.11 (c), existem $Q \in \mathcal{A}$ e $u \in SO(3)$ tais que $B_2'(x,\ell) \subset u(Q)$ e $\sigma(Q) \leq 11B_2'(x,\ell)$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma(B_2'(x,\ell))}\int_{B_2'(x,\ell)} | f(y) | d\sigma(y) &\leq \frac{11}{\sigma(Q)}\int_{u(Q)} | f(y) | d\sigma(y) \\
&= \frac{11}{\sigma(Q)}\int_{Q} | f(uz) | d\sigma(z) \\
&\leq 11M_d(f \circ u)(u^{-1}(x)).
\end{aligned}$$

Integrando ambos os membros da desigualdade acima sobre $SO(3)$ e com respeito à medida de Haar du, obtemos, para todo $\ell > 0$,

$$\frac{1}{\sigma(B_2'(x,\ell))}\int_{B_2'(x,\ell)} | f(y) | d\sigma(y) \leq 11\int_{SO(3)} M_d(f \circ u)(u^{-1}(x))du$$

e assim

$$(2) \qquad Mf(x) \leq 11\int_{SO(3)} M_d(f \circ u)(u^{-1}(x))du.$$

Como $w \in A_p(S^2)$, por 4.1(1) segue que $w \circ u \in A_p(S^2)$ e, além disso, $K(p, w \circ u) = K(p,w)$, para todo $u \in SO(3)$. De fato, se $u \in SO(3), x \in S^2$ e $\ell > 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\sigma(B_2'(x,\ell))}\int_{B_2'(x,\ell)} w \circ u(y)d\sigma(y)\right)\left(\frac{1}{\sigma(B_2'(x,\ell)}\int_{B_2'(x,\ell)} w \circ u(y)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(y)\right)^{p-1} = \\
&= \left(\frac{1}{\sigma(B_2'(u(x),\ell))}\int_{B_2'(u(x),\ell)} w(y)d\sigma(y)\right)\left(\frac{1}{\sigma(B_2'(u(x),\ell))}\int_{B_2'(u(x),\ell)} w(y)^{\frac{-1}{p-1}}d\sigma(y)\right)^{p-1} \\
&\leq K(p,w).
\end{aligned}$$

Então, pelo Teorema de Fubini, pela desigualdade de Jensen aplicada à função convexa $\phi(t) = t^p$, por (2), pelo Lema 4.3(a), pelo Teorema 3.9 e pelo fato de que a medida de Lebesgue $d\sigma(x)$ é invariante por rotação sobre S^2, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{S^2}(Mf(x))^p w(x)d\sigma(x) &\leq \int_{S^2}\left(11\int_{SO(3)} M_d(f \circ u)(u^{-1}(x))du\right)^p w(x)d\sigma(x) \\
&\leq 11^p\int_{S^2}\int_{SO(3)}(M_d(f \circ u)(u^{-1}(x)))^p du \;\; w(x)d\sigma(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 11^p \int_{SO(3)} \int_{S^2} (M_d(f \circ u)(y))^p w \circ u(y) d\sigma(y) du \\
&\leq C 11^p \int_{SO(3)} \int_{S^2} \mid f \circ u(y) \mid^p w \circ u(y) d\sigma(y) du \\
&= C 11^p \int_{SO(3)} \int_{S^2} \mid f \circ u(u^{-1}(x)) \mid^p w(x) d\sigma(x) du \\
&= C 11^p \int_{S^2} \mid f(x) \mid^p w(x) d\sigma(x).
\end{aligned}
$$

Fazendo $K = C11^p$, temos que K é uma constante que só depende de p e de w, o que conclui a demonstração do teorema.

CAPÍTULO IV

O ESPAÇO BMO

Um dos objetivos principais deste capítulo é demonstrar a desigualdade de Fefferman-Stein, com pesos da classe A_q de Muckenhoupt, entre o operador maximal de Hardy-Littlewood e o operador maximal sharp. Outro objetivo é obter um teorema de interpolação do tipo Marcinkiewicz-Riviere envolvendo o espaço BMO. Ambos os resultados são importantes no estudo de operadores integrais singulares. A desigualdade de Fefferman-Stein no caso mais geral da esfera $S^n, n \geq 1$, foi demonstrado por Tozoni em [21].

Na primeira seção definimos o operador maximal sharp do tipo diádico e demonstramos algumas de suas propriedades básicas.

Na segunda seção definimos o espaço BMO_d a partir das definições dadas na primeira seção e demonstramos algumas propriedades deste espaço.

Na terceira seção demonstramos a desigualdade de Fefferman-Stein, com pesos da classe $A_\infty(\mathcal{A})$, entre o operador maximal do tipo diádico definido no Capítulo II e o operador maximal sharp do tipo diádico.

O operador maximal sharp do tipo diádico e o espaço BMO_d são estudados na Teoria dos Martingais (ver Neveu [14] e Garsia [11]), e são análogos ao operador maximal sharp diádico e ao espaço BMO (diádico) estudados em Análise (ver Schipp-Wade-Simon [17]). As demonstrações apresentadas nas três primeiras seções seguem as idéias do caso não-diádico, que podem ser encontradas em Garcia-Cuerva e Rubio de Francia [10].

A quarta seção traz resultados análogos aos da terceira seção, e tem como resultado principal a desigualdade de Fefferman-Stein para operadores maximais não-diádicos. A técnica utilizada nesta seção é a mesma apresentada na quarta seção do Capítulo III.

Na quinta seção estudamos o espaço BMO. Esta seção traz como resultado principal o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz-Riviere para operadores lineares definidos em $L_w^\infty(S^2)$.

1. A FUNÇÃO MAXIMAL SHARP DO TIPO DIÁDICO

1.1. DEFINIÇÃO. Seja $f \in L^1(S^2)$. Dado $x \in S^2$, definimos a função maximal sharp do tipo diádico, por

$$M_d^\# f(x) = \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \mid f(y) - f_Q \mid d\sigma(y).$$

onde $f_Q = \dfrac{1}{\sigma(Q)}\displaystyle\int_Q f(y)d\sigma(y)$.

1.2. TEOREMA. Se $f \in L^1(S^2)$, então:

(1) $M_d^\# f(x) \leq 2\sup\limits_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} \inf\limits_{a\in\mathbb{R}} \dfrac{1}{\sigma(Q)}\displaystyle\int_Q \mid f(y) - a \mid d\sigma(y) \leq 2M_d^\# f(x)$;

(2) $M_d^\#(\mid f \mid)(x) \leq 2M_d^\# f(x)$;

(3) $M_d^\# f(x) \leq 2M_d f(x)$.

DEMONSTRAÇÃO. A segunda desigualdade de (1) é trivial. Para demonstrarmos a primeira, observamos que, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $Q \in \mathcal{A}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \mid f(y) - f_Q \mid d\sigma(y) &\leq \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \mid f(y) - a \mid d\sigma(y) + \mid f_Q - a \mid \\
&= \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \mid f(y) - a \mid d\sigma(y) + \left|\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q (f(y) - a) d\sigma(y)\right| \\
&\leq \frac{2}{\sigma(Q)} \int_Q \mid f(y) - a \mid d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Disso, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \mid f(y) - f_Q \mid d\sigma(y) &\leq 2\inf_{a\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \mid f(y) - a \mid d\sigma(y) \\
&\leq 2\sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} \inf_{a\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \mid f(y) - a \mid d\sigma(y)
\end{aligned}$$

o que demonstra (1).

Agora, por (1), temos

$$\begin{aligned}
M_d^{\#}(|f|)(x) &\leq 2\sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}}\inf_{a\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \|f(y)| - a|\, d\sigma(y)\\
&\leq 2\sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}}\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \|f(y)| - |f_Q\|\, d\sigma(y)\\
&\leq 2\sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}}\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q |f(y) - f_Q|\, d\sigma(y) = 2M_d^{\#}f(x).
\end{aligned}$$

o que demonstra (2).

Finalmente,

$$\begin{aligned}
M_d^{\#}f(x) &= \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}}\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q |f(y) - f_Q|\, d\sigma(y)\\
&\leq \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}}\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q |f(y)|\, d\sigma(y) + \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} |f_Q| \leq 2M_d f(x),
\end{aligned}$$

o que demonstra (3).

1.3. TEOREMA. Seja $f \in L^1(S^2)$. Se f é constante q.s., então $M_d^{\#}f(x) = 0$ para todo $x \in S^2$. Se $M_d^{\#}f(x) = 0$ para algum $x \in S^2$, então f é constante q.s.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, inicialmente, $f(y) = c$ q.s., onde c é uma constante. Então, se $Q \in \mathcal{A}$, temos

$$f_Q = \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q f(y)d\sigma(y) = c.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
M_d^{\#}f(x) &= \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}}\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q |f(y) - f_Q|\, d\sigma(y)\\
&= \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}}\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q |c - c|\, d\sigma(y) = 0.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que $M_d^{\#}f(x) = 0$ para algum $x \in S^2$. Então, se $Q \in \mathcal{A}$ e $x \in Q$, temos

$$0 = \int_Q \mid f(y) - f_Q \mid d\sigma(y) = \int_{S^2} \mid f(y)\chi_Q(y) - f_Q\chi_Q(y) \mid d\sigma(y).$$

Portanto, $f(y)\chi_Q(y) = f_Q\chi_Q(y)$ q.s. Como esta igualdade vale para todo $Q \in \mathcal{A}$ que contém x, em particular vale para $Q_0 = S^2$. Daí, segue que $f(y) = f_{Q_0}$ q.s., e, assim, f é constante q.s.

2. O ESPAÇO BMO_d

2.1. DEFINIÇÃO. Seja w um peso sobre S^2. O espaço $BMO_d(w)$ é formado pelas funções $f \in L^1(S^2)$ tais que $M_d^{\#}f \in L_w^{\infty}(S^2)$. Se $f \in BMO_d(w)$, definimos $\|f\|_{BMO_d(w)} = \|M_d^{\#}f\|_{\infty,w}$.

2.2. OBSERVAÇÃO. Dado um peso w, como $w(E) = \displaystyle\int_E w(x)d\sigma(x)$ para todo subconjunto mensurável $E \subset S^2$, temos que $w(E) = 0$ se e somente se $\sigma(E) = 0$. Portanto, se definirmos o espaço BMO_d como sendo o conjunto das funções $f \in L^1(S^2)$ tais que $M_d^{\#}f \in L^{\infty}(S^2)$, e definirmos $\|f\|_{BMO_d} = \|M_d^{\#}f\|_{\infty}$, teremos que os espaços BMO_d e $BMO_d(w)$ coincidem e $\|f\|_{BMO_d} = \|f\|_{BMO_d(w)}$. Portanto, nos enunciados e demonstrações dos resultados que daremos a seguir envolvendo os espaços $BMO_d(w)$, bastará considerar o caso $w \equiv 1$ e, portanto, omitiremos o peso w.

2.3. LEMA. A aplicação $f \mapsto \|f\|_{BMO_d}$ é uma semi-norma em BMO_d e $\|f\|_{BMO_d} = 0$ se, e somente se, f é constante.

DEMONSTRAÇÃO. É claro que $\|f\|_{BMO_d} \geq 0$ para todo $f \in BMO_d$. Agora, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in BMO_d$, temos

$$(\lambda f)_Q = \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q (\lambda f)(x)d\sigma(x) = \lambda f_Q.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M_d^{\#}(\lambda f)(x) &= \sup_{\substack{x\in Q \\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \mid (\lambda f)(y) - (\lambda f)_Q \mid d\sigma(y) \\ &= \sup_{\substack{x\in Q \\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \mid \lambda \mid\mid f(y) - f_Q \mid d\sigma(y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mid \lambda \mid \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \mid f(y) - f_Q \mid d\sigma(y) \\
&= \mid \lambda \mid M_d^{\#} f(x).
\end{aligned}
$$

Conseqüentemente,

$$\|\lambda f\|_{BMO_d} = \|M_d^{\#}(\lambda f)\|_\infty = \| \mid \lambda \mid M_d^{\#} f\|_\infty = \mid \lambda \mid \|M_d^{\#} f\|_\infty = \mid \lambda \mid \|f\|_{BMO_d}.$$

Por outro lado, se $f, g \in BMO_d$, como $(f+g)_Q = f_Q + g_Q$, temos, para todo $Q \in \mathcal{A}$,

$$\mid (f(y) + g(y) - (f+g)_Q \mid \leq \mid f(y) - f_Q \mid + \mid g(y) - g_Q \mid .$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
M_d^{\#}(f+g)(x) &= \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \mid (f(y)+g(y)) - (f+g)_Q \mid d\sigma(y) \\
&\leq \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q (\mid f(y) - f_Q \mid + \mid g(y) - g_Q \mid) d\sigma(y) \\
&= M_d^{\#} f(x) + M_d^{\#} g(x).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{BMO_d} &= \|M_d^{\#}(f+g)\|_\infty \\
&\leq \|M_d^{\#} f + M_d^{\#} g\|_\infty \\
&\leq \|M_d^{\#} f\|_\infty + \|M_d^{\#} g\|_\infty \\
&= \|f\|_{BMO_d} + \|g\|_{BMO_d}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\| \cdot \|_{BMO_d}$ é uma semi-norma sobre BMO_d.

Agora, se f é constante, pelo Teorema 1.3 temos que $M_d^{\#} f(x) = 0$ para todo $x \in S^2$. Portanto, $\|f\|_{BMO_d} = \|M_d^{\#} f\|_\infty = 0$. Reciprocamente, se $\|f\|_{BMO_d} = \|M_d^{\#} f\|_\infty = 0$, então $M_d^{\#} f(x) = 0$ q.s. e, assim, o Teorema 1.3 nos garante que f deve ser constante.

2.4. OBSERVAÇÃO. A aplicação $f \mapsto \|f\|_{BMO_d}$ é apenas uma semi-norma em BMO_d. Consideraremos, então, BMO_d como o espaço quociente em relação às funções constantes e, assim, pelo Lema 2.3, a aplicação $f \mapsto \|f\|_{BMO_d}$ passará a ser uma norma em BMO_d.

2.5. TEOREMA. O espaço BMO_d é um espaço de Banach.

DEMONSTRAÇÃO. Seja (f_j) uma seqüência de Cauchy em BMO_d. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $i, j > N$, temos

$$(1) \qquad \|f_i - f_j\|_{BMO_d} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, para todo $Q \in \mathcal{A}$, se $i, j > N$, por (1), temos

$$(2) \qquad \frac{1}{\sigma(Q)}\|(f_i - (f_i)_Q) - (f_j - (f_j)_Q)\|_1 =$$
$$= \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q |\, (f_i(x) - f_j(x) - (f_i - f_j)_Q) d\sigma(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, $(f_j - (f_j)_Q)$ é uma seqüência de Cauchy em $L^1(S^2)$, para todo $Q \in \mathcal{A}$. Em particular, $(f_j - (f_j)_Q)$ é uma seqüência de Cauchy em $L^1(S^2)$, para $Q = S^2$. Portanto, como $L^1(S^2)$ é completo, existe $g \in L^1(S^2)$ tal que $(f_j - (f_j)_{S^2})$ converge para g em $L^1(S^2)$. Agora, como estamos trabalhando com funções módulo constantes, podemos assumir $(f_j)_{S^2} = 0$, para todo j. Daí, f_j converge para g em $L^1(S^2)$. Mas, para todo $Q \in \mathcal{A}$, pela convergência em $L^1(S^2)$, temos

$$(f_j)_Q = \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q f_j(x) d\sigma(x) \to \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q g(x) d\sigma(x) = g_Q.$$

quando $j \to \infty$. Portanto, para todo $Q \in \mathcal{A}$, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que $(f_j - (f_j)_Q)\chi_Q$ converge para $(g - g_Q)\chi_Q$ em $L^1(S^2)$. Então, fazendo j tender a infinito em (2), temos

$$\frac{1}{\sigma(Q)}\|(f_i - (f_i)_Q)\chi_Q - (g - g_Q)\chi_Q\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para todo $Q \in \mathcal{A}$ e $i > N$. Logo, se $i > N$,

$$\|g - f_i\|_{BMO_d} = sup \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q |\, (g(x) - f_i(x)) - (g - f_i)_Q \,|\, d\sigma(x) < \varepsilon.$$

Portanto, $f_j \to g$ em BMO_d, quando $j \to \infty$. Resta mostrar que $g \in BMO_d$. Para isto, observamos que

$$\|g\|_{BMO_d} \leq \|g - f_N\|_{BMO_d} + \|f_N\|_{BMO_d} < \varepsilon + \|f_N\|_{BMO_d} < \infty,$$

pois $f_N \in BMO_d$. Logo, $g \in BMO_d$, e BMO_d é um espaço de Banach.

2.6. TEOREMA. Se $w \in A_1(\mathcal{A})$, isto é, se $M_d w(x) \leq Cw(x)$ q.s., então *log* w está em BMO_d.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\phi = log\ w$, isto é, $w = e^{\phi}$. Como $w \in A_1(\mathcal{A})$, temos, para todo $Q \in \mathcal{A}$,

$$\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q e^{\phi(x)} d\sigma(x) \leq C e^{\phi(x)},$$

para quase todo $x \in Q$, ou, equivalentemente,

$$\left(\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q e^{\phi(x)} d\sigma(x)\right) \sup_{x \in Q} ess(e^{-\phi(x)}) \leq C \quad \text{q.s..}$$

Agora,

$$\sup_{x \in Q} ess(e^{-\phi(x)}) = exp(-\inf_{x \in Q} ess\ \phi(x)). \tag{1}$$

De fato, seja $k = \inf_{x \in Q} ess\ \phi(x)$. Então $k \leq \phi(x)$ q.s. em Q. Daí, $e^{-k} \geq e^{-\phi(x)}$ q.s. em Q. Se $M = \sup_{x \in Q} ess(e^{-\phi(x)})$, afirmamos que $M = e^{-k}$. Com efeito, é verdade que $M \leq e^{-k}$. Vamos supor, então, que $M < e^{-k}$. Como $M > 0$, existe $k' > k$ tal que $M = e^{-k'}$. Então $e^{-k'} \geq e^{-\phi(x)}$ q.s. em Q. Disso segue que $k' \leq \phi(x)$, q.s. em Q, o que contraria o fato que $k = \inf_{x \in Q} ess\ \phi(x)$. Logo, $M = \sup_{x \in Q} ess(e^{-\phi(x)}) = e^{-k}$, o que demonstra (1).

Pela desigualdade de Jensen aplicada à função convexa $\varphi(x) = e^x$, temos

$$exp(\phi_Q) = exp\left(\int_Q \phi(x) \frac{d\sigma(x)}{\sigma(Q)}\right) \leq \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q e^{\phi(x)} d\sigma(x). \tag{2}$$

Então, de (1) e (2), temos

$$exp(\phi_Q) exp(-\inf_{x \in Q} ess\ \phi(x)) \leq \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q e^{\phi(x)} d\sigma(x) \ \sup_{x \in Q} ess(e^{-\phi(x)}) \leq C.$$

Disso segue que existe $K = log\ C$ tal que

$$\phi_Q - \inf_{x \in Q} ess(e^{\phi(x)}) \leq K.$$

Logo,

$$| \phi(x) - \phi_Q | \leq \ (\phi(x) - \inf_{x \in Q} ess\ \phi(x)) + (\phi_Q - \inf_{x \in Q} ess\ \phi(x)) \text{ q.s.}$$

Integrando ambos os membros da desigualdade acima sobre Q, temos

$$\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q | \phi(x) - \phi_Q | \, d\sigma(x) \leq 2\left(\phi_Q - \inf_{x \in Q} ess\ \phi(x)\right) \leq 2K.$$

E, daí, $\|M_d^{\#}(log\ w)\|_\infty \leq 2K$. Portanto, $log\ w \in BMO_d$.

2.7. OBSERVAÇÃO. Se a e b são números reais não-negativos e se $0 < \gamma < 1$, temos que $(a+b)^\gamma \leq a^\gamma + b^\gamma$. Para vermos isto, basta considerarmos a função $g : I\!R_+ \to I\!R$ definida por $g(x) = (a+x)^\gamma - a^\gamma - x^\gamma$. Então, temos que $g'(x) = \gamma[(a+x)^{\gamma-1} - x^{\gamma-1}] \leq 0$, pois a e x são não-negativos e $0 < \gamma < 1$. Daí segue que g é uma função não-crescente e, como $g(0) = 0$, temos que $g(x) \leq 0$ para todo $x \geq 0$. Logo, $(a+x)^\gamma \leq a^\gamma + x^\gamma$ para $a \geq 0$, $x \geq 0$ e $0 < \gamma < 1$.

2.8. DEFINIÇÃO. Seja μ uma medida de Borel positiva sobre S^2. Definimos, para todo $x \in S^2$, o operador maximal do tipo diádico

$$M_d\mu(x) = \sup_{\substack{x \in Q \\ Q \in \mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q d\mu(x).$$

2.9. OBSERVAÇÃO. Se μ é uma medida de Borel positiva, então, dado $t > 0$, temos

$$\sigma(\{x \in S^2 : M_d\mu(x) > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_{S^2} d\mu(x).$$

A demonstração deste fato é inteiramente análoga à demonstração de II-1.4.

2.10. TEOREMA. Seja μ uma medida de Borel positiva tal que $M_d\mu(x) < \infty$ para quase todo $x \in S^2$, e seja $0 < \gamma < 1$. Então a função $w(x) = (M_d\mu(x))^\gamma$ é um peso da classe $A_1(\mathcal{A})$, onde a constante $C(1, w)$ depende somente de γ.

DEMONSTRAÇÃO. Fixemos um elemento do tipo diádico $Q \in \mathcal{A}_k$. Mostraremos que

$$\frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q w(x) d\sigma(x) \leq Cw(x),$$

para quase todo $x \in Q$, com C independente de Q.

Seja $\tilde{Q} \in \mathcal{A}_{k-1}$ tal que $Q \subset \tilde{Q}$. Vamos decompor a medida μ da seguinte forma: $\mu = \mu_1 + \mu_2$, onde $\mu_1(A) = \mu(A \cap \tilde{Q})$ para todo subconjunto mensurável A de S^2, ou seja, μ_1 é a restrição de μ a $\tilde{Q}$. Então, $M_d\mu \leq M_d\mu_1 + M_d\mu_2$. Pela Observação 2.7, temos que $(M_d\mu)^\gamma \leq (M_d\mu_1)^\gamma + (M_d\mu_2)^\gamma$. Então basta mostrar que as médias de $(M_d\mu_1)^\gamma$ e de $(M_d\mu_2)^\gamma$ sobre Q são ambas limitadas por $Cw(x)$, para quase todo $x \in Q$, com C dependendo somente de γ. Vamos analisar as estimativas para as médias de $(M_d\mu_1)^\gamma$ e de $(M_d\mu_2)^\gamma$ separadamente. Para todo $R > 0$, utilizando a Observação 2.9 e o resultado 1 do Apêndice, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q (M_d\mu_1(x))^\gamma d\sigma(x) &= \frac{1}{\sigma(Q)}\int_0^\infty \gamma t^{\gamma-1}\sigma(\{x\in Q: M_d\mu_1(x)>t\})dt \\
&= \frac{1}{\sigma(Q)}\Big(\int_0^R \gamma t^{\gamma-1}\sigma(\{x\in Q: M_d\mu_1(x)>t\})dt \\
&+ \int_R^\infty \gamma t^{\gamma-1}\sigma(\{x\in Q: M_d\mu_1(x)>t\})dt\Big) \\
&\leq \frac{1}{\sigma(Q)}\Big(\int_0^R \gamma t^{\gamma-1}\sigma(Q)dt + \int_R^\infty \gamma t^{\gamma-1}\Big(\frac{1}{t}\int_{S^2} d\mu_1(x)\Big)\Big)dt \\
&= \frac{1}{\sigma(Q)}\Big(\sigma(Q)R^\gamma + \mu_1(S^2)\int_R^\infty \gamma t^{\gamma-2}dt\Big) \\
&= R^\gamma + \frac{\mu_1(S^2)\gamma R^{\gamma-1}}{\sigma(Q)(1-\gamma)} \\
&= R^\gamma\Big(1+\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\mu(\tilde{Q})}{R\sigma(Q)}\Big).
\end{aligned}$$

Tomando $R=\mu(\tilde{Q})/\sigma(Q)$, e lembrando que $\sigma(\tilde{Q})\leq 8\sigma(Q)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q (M_d\mu_1(x))^\gamma d\sigma(x) &\leq \Big(\frac{\mu(\tilde{Q})}{\sigma(Q)}\Big)^\gamma\Big(1+\frac{\gamma}{1-\gamma}\Big) \\
&\leq \frac{8^\gamma}{1-\gamma}\Big(\frac{\mu(\tilde{Q})}{\sigma(\tilde{Q})}\Big)^\gamma \\
&\leq C(M_d\mu(x))^\gamma \\
&= Cw(x),
\end{aligned}$$

para quase todo $x\in Q$, onde $C=8^\gamma/(1-\gamma)$.

Agora, basta obter uma estimativa para a média de $(M_d\mu_2)^\gamma$ sobre Q. Para isto usaremos o fato que, para quase todos $x,y\in Q$, temos $M_d\mu_2(x)=M_d\mu_2(y)$. Na verdade, se $B=\bigcup_{Q\in\mathcal{A}}\partial Q$, temos que $M_d\mu_2(x)=M_d\mu_2(y)$ para todos $x,y\in Q\setminus B$. De fato, seja $x\in Q\setminus B$ e seja $Q'\in\mathcal{A}$ tal que $x\in Q'$. Então, podemos ter $Q'\subset\tilde{Q}$ ou $Q'\cap(S^2\setminus\tilde{Q})\neq\phi$. Se $Q'\subset\tilde{Q}$, temos que $\mu_2(Q')=0$. Se $Q'\cap(S^2\setminus\tilde{Q})\neq\phi$, como $x\in Q\setminus B$, temos que $Q\subset Q'$. Portanto,

$$M_d\mu_2(x)=\sup_{\substack{Q'\in\mathcal{A}\\ Q\subset Q'}}\frac{\mu_2(Q')}{\sigma(Q')},$$

e, assim, $M_d\mu_2(x)=M_d\mu_2(y)$, para quase todos $x,y\in Q$, já que $\sigma(B)=0$. Logo, para quase todo $x\in Q$, temos

$$\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q (M_d\mu_2(y))^\gamma d\sigma(y) = (M_d\mu_2(x))^\gamma \leq (M_d\mu(x))^\gamma = w(x),$$

o que demonstra que a média de $(M_d\mu_2(x))^\gamma$ é menor ou igual a $Cw(x)$, para $C = 1$ e para quase todo $x \in Q$.

2.11. OBSERVAÇÃO. $L^\infty(S^2) \subset BMO_d$. De fato, se $f \in L^\infty(S^2)$, existe $C > 0$ tal que $\mid f(x) \mid \leq C$ q.s. e, pelo Teorema 1.2(3), temos

$$\begin{aligned} M_d^{\#} f(x) &\leq 2M_d f(x) \\ &= 2\sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \mid f(y) \mid d\sigma(y) \\ &\leq 2\sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q C d\sigma(y) = 2C. \end{aligned}$$

Logo, $M_d^{\#} f \in L^\infty(S^2)$, isto é, $f \in BMO_d$.

2.12. EXEMPLO. Seja $\delta_{\mathbb{1}}$ a medida de Dirac concentrada em $\mathbb{1} = (1,0,0)$, sobre os borelianos de S^2, isto é, $\delta_{\mathbb{1}}(B) = 1$, se $\mathbb{1} \in B$ e $\delta_{\mathbb{1}}(B) = 0$, se $\mathbb{1} \notin B$. Para $k \geq 2$ e $j \in \{1,2,3,4\}$, denotamos $G_j^k = I_1^k \times I_j^2$, $Q_j^k = \xi_2(G_j^k)$ e $B_k = Q_1^k \cap Q_2^k \cap Q_3^k \cap Q_4^k$. Como B_k é uma bola em S^2 centrada em $\mathbb{1}$, existe $\ell_k > 0$ tal que $B_k = B_2'(\mathbb{1}, \ell_k)$. Temos que

$$\begin{aligned} \sigma(Q_j^k) &= \sigma(\xi_1(I_j^2))\int_{I_1^k} sen\theta_1 d\theta_1 = \frac{\pi}{2}\int_0^{2^{-k+1}\pi} sen\theta_1 d\theta_1 \\ &= \frac{\pi}{2}(1 - cos\ 2^{-k+1}\pi). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sigma(B_k) &= 4\sigma(Q_j^k) = \pi(2 - 2cos\ 2^{-k+1}\pi). \\ \sigma(B_k) &= \sigma(B_2'(\mathbb{1}, \ell_k)) = \pi\ell_k^2 \end{aligned}$$

e, portanto, $\ell_k = (2 - 2cos\ 2^{-k+1}\pi)^{1/2}$, para $k \geq 2$. Tomando $Q_1^1 = S^2$ e $\ell_1 = 2$, temos que $\sigma(Q_1^1) = 8\ \sigma(Q_j^2)$. Se $\mid \mathbb{1} - x \mid_3 \leq \ell_2$, temos

$$M_d\delta_{\mathbb{1}}(x) = \sup_{\substack{x\in Q\\ Q\in\mathcal{A}}} \frac{\delta_{\mathbb{1}}(Q)}{\sigma(Q)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\substack{x\in Q_j^k\\ k\geq 2}} \frac{\delta_{\mathbb{1}}(Q_j^k)}{\sigma(Q_j^k)}\\
&= \sup_{\substack{|\mathbb{1}-x|_3\leq \ell_k\\ k\geq 2}} \frac{1}{\sigma(Q_j^k)}\\
&= \sup_{\substack{|\mathbb{1}-x|\leq \ell_k\\ k\geq 2}} \frac{4}{\pi\ell_k^2}.
\end{aligned}$$

Suponhamos $\ell_{k+1} <| \mathbb{1} - x |_3 \leq \ell_k$. $k \geq 2$. Então

$$M_d\delta_{\mathbb{1}}(x) = \frac{4}{\pi\ell_k^2},$$

e, se $Q_i^{k+1} \subset Q_j^k$, segue por I-2.11(a) que

$$\ell_k^2 = \frac{4}{\pi}\sigma(Q_j^k) \leq \frac{4}{\pi}8\sigma(Q_i^{k+1}) = 8\ell_{k+1}^2.$$

Assim,

$$\frac{8}{\ell_k^2} > \frac{1}{| \mathbb{1} - x |_3^2} \geq \frac{1}{\ell_k^2}$$

e daí

$$\begin{aligned}
2\pi M_d(\delta_{\mathbb{1}})(x) &= 2\pi\frac{4}{\pi\ell_k^2} = \frac{8}{\ell_k^2}\\
&> \frac{1}{| \mathbb{1} - x |_3^2}\\
&\geq \frac{1}{\ell_k^2} = \frac{\pi}{4}\frac{4}{\pi\ell_k^2}\\
&= \frac{\pi}{4}M_d(\delta_{\mathbb{1}})(x).
\end{aligned}$$

Suponhamos, agora, $\ell_2 = \sqrt{2} <| \mathbb{1} - x |_3 \leq \ell_1 = 2$. Então

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{| \mathbb{1} - x |_3^2} \geq \frac{1}{4}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
2\pi M_d(\delta_{\mathbb{1}})(x) &= \frac{2\pi}{\sigma(Q_1^1)} = \frac{1}{2} \\
&> \frac{1}{|\,\mathbb{1} - x\,|_3^2} \geq \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4\pi} \\
&= \pi M_d(\delta_{\mathbb{1}})(x).
\end{aligned}
$$

Portanto, podemos concluir que, para qualquer $x \in S^2$,

$$
(1) \qquad \frac{\pi}{4} M_d(\delta_{\mathbb{1}})(x) \leq \frac{1}{|\,\mathbb{1} - x\,|_3^2} < 2\pi M_d(\delta_{\mathbb{1}})(x).
$$

Seja $0 < \gamma < 1$ e seja $w_\gamma(x) = |\,\mathbb{1} - x\,|_3^{-2\gamma}, x \in S^2$. Pelo Teorema 2.10 temos que $(M_d(\delta_{\mathbb{1}}))^\gamma \in A_1(\mathcal{A})$ e, assim, segue por (1) que $w_\gamma \in A_1(\mathcal{A})$. Então, pelo Teorema 2.6, temos que $f_\gamma(x) = log\ w_\gamma(x)$ está em BMO_d. Porém, f_γ não está em $L^\infty(S^2)$, pois não é limitada. Logo, $L^\infty(S^2) \subsetneq BMO_d$.

3. A DESIGUALDADE DE FEFFERMAN-STEIN PARA OPERADORES MAXIMAIS DIÁDICOS

3.1. TEOREMA. Seja $0 < p_0 < \infty$. Então, para todo $p_0 \leq p < \infty$, existe uma constante C_p, dependendo somente de p, tal que, se $f \in L^1(S^2)$ é tal que $M_d f \in L^{p_0}(S^2)$, então

$$
\int_{S^2} (M_d f(x))^p d\sigma(x) \leq C_p \int_{S^2} (M_d^{\#} f(x))^p d\sigma(x).
$$

DEMONSTRAÇÃO. Usaremos aqui as mesmas notações utilizadas na demonstração de II-1.4. Como $M_d(|\,f\,|) = M_d f$ e $M_d^{\#}(|\,f\,|) \leq 2M_d^{\#} f$, podemos supor $f \geq 0$. Dado $t > 0$, denotaremos

$$
E_t = \{x \in S^2 : M_d f(x) > t\}
$$

e

$$
F_t = \{x \in S^2 : M_d^{\#} f(x) > t\}.
$$

Como em II-1.4., seja $\{Q_{j,t}\}_{j \in J_t}$ a família de elementos do tipo diádico maximais tal que, para todo j,

$$
(1) \qquad t < \frac{1}{\sigma(Q_{j,t})} \int_{Q_{j,t}} f(x) d\sigma(x) \leq 8t
$$

e tal que $f(x) \leq t$ para quase todo $x \notin \bigcup_{j\in J_t} Q_{j,t}$. Se $0 < t < s$ e $j \in J_s$, então $f_{Q_{j,s}} > s > t$ e, portanto, existe $k \in J_t$ tal que $Q_{j,s} \subset Q_{k,t}$. Fixemos $t > 0$, $A > 0$, $j_0 \in J_{2^{-4}t}$, e seja $Q_0 = Q_{j_0,2^{-4}t}$. Então

$$\frac{t}{2^4} < \frac{1}{\sigma(Q_0)} \int_{Q_0} f(y)d\sigma(y) = f_{Q_0} < \frac{t}{2}. \tag{2}$$

Existem duas possibilidades:

$$Q_0 \subset F_{t/A} \quad \text{ou} \quad Q_0 \not\subset F_{t/A}.$$

No primeiro caso,

$$\sum_{\{j:Q_{j,t}\subset Q_0\}} \sigma(Q_{j,t}) \leq \sigma(Q_0) \leq \sigma(F_{t/A}). \tag{3}$$

No segundo caso,

$$\frac{1}{\sigma(Q_0)} \int_{Q_0} | f(y) - f_{Q_0} | d\sigma(y) \leq \frac{t}{A}. \tag{4}$$

Assim, por (1), (2) e (4)

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2}\sum_{\{j:Q_{j,t}\subset Q_0\}} \sigma(Q_{j,t}) &= \sum_{\{j:Q_{j,t}\subset Q_0\}} (t\sigma(Q_{j,t}) - \frac{t}{2}\sigma(Q_{j,t})) \\
&\leq \sum_{\{j:Q_{j,t}\subset Q_0\}} (t\sigma(Q_{j,t}) - f_{Q_0}\sigma(Q_{j,t})) \\
&\leq \sum_{\{j:Q_{j,t}\subset Q_0\}} \left(\int_{Q_{j,t}} f(y)d\sigma(y) - f_{Q_0}\sigma(Q_{j,t})\right) \\
&\leq \sum_{\{j:Q_{j,t}\subset Q_0\}} \int_{Q_{j,t}} | f(y) - f_{Q_0} | d\sigma(y) \\
&\leq \int_{Q_0} | f(y) - f_{Q_0} | d\sigma(y) \\
&\leq \frac{t}{A}\sigma(Q_0).
\end{aligned} \tag{5}$$

Somando sobre todos os $Q_0's$ possíveis. por (3) e (5). temos:

$$\sum_{j\in J_t} \sigma(Q_{j,t}) \leq \sigma(F_{t/A}) + \frac{2}{A} \sum_{k\in J_{2^{-4}t}} \sigma(Q_{k,2^{-4}t}) \tag{6}$$

Portanto, por II-1.4 e por (6), temos

$$(7) \qquad \sigma(E_t) = \sum_{j\in J_t} \sigma(Q_{j,t}) \leq \sigma(F_{t/A}) + \frac{2}{A}\sigma(E_{2^{-4}t}).$$

Se fizermos $\alpha(t) = \sigma(E_t)$, de (7), teremos

$$(8) \qquad \alpha(t) \leq \sigma(F_{t/A}) + \frac{2}{A}\alpha(2^{-4}t).$$

Agora, dado $N > 0$, temos

$$\begin{aligned} I_N &= \int_0^N pt^{p-1}\alpha(t)dt \\ &\leq pp_0^{-1}N^{p-p_0}\int_0^N p_0t^{p_0}\alpha(t)dt \\ &\leq pp_0^{-1}N^{p-p_0}\int_{S^2}(M_df(x))^{p_0}d\sigma(x) < \infty, \end{aligned}$$

já que, por hipótese, $M_df \in L^{p_0}(S^2)$. De (8), temos

$$\begin{aligned} I_N &= \int_0^N pt^{p-1}\alpha(t)dt \\ &\leq \int_0^N pt^{p-1}\sigma(F_{t/A}) + \frac{2}{A}\int_0^N pt^{p-1}\alpha(2^{-4}t)dt \\ &= \int_0^N pt^{p-1}\sigma(F_{t/A})dt + \frac{2^{4p+1}}{A}\int_0^{2^{-4}N} pt^{p-1}\alpha(t)dt \\ &\leq \int_0^N pt^{p-1}\sigma(F_{t/A})dt + \frac{C}{A}I_N, \end{aligned}$$

onde $C = 2^{4p+1}$. Tomando $A = 2C$, e fazendo $N \to \infty$ em ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$\int_0^\infty pt^{p-1}\alpha(t)dt \leq 2\int_0^\infty pt^{p-1}\sigma(F_{t/A})dt$$

e, então, pelo resultado 1 do Apêndice, temos

$$\begin{aligned} \int_{S^2}(M_df(x))^pd\sigma(x) &= \int_0^\infty pt^{p-1}\alpha(t)dt \\ &\leq 2\int_0^\infty pt^{p-1}\sigma(F_{t/A})dt \\ &= 2A^p\int_0^\infty pt^{p-1}\sigma(F_t)dt \\ &= 2^{p+1}C^p\int_0^\infty pt^{p-1}\sigma(F_t)dt \\ &= C_p\int_{S^2}(M_d^{\#}f(x))^pd\sigma(x), \end{aligned}$$

onde $C_p = 2^{5p+2}$.

3.2. TEOREMA. Seja w um peso tal que $w \in A_\infty(\mathcal{A})$, e seja $0 < p_0 < \infty$. Então, para todo $p_0 \leq p < \infty$, existe uma constante $C_{p,w}$, dependendo somente de p e w, tal que, se $f \in L^1(S^2)$ é tal que $M_d f \in L^{p_0}_w(S^2)$, então

$$\int_{S^2} (M_d f(x))^p w(x) d\sigma(x) \leq C_{p,w} \int_{S^2} (M_d^\# f(x))^p w(x) d\sigma(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração deste teorema é uma repetição do argumento usado na demonstração do teorema anterior. Assim, consideraremos como no Teorema 3.1 a família de elementos maximais $\{Q_{j,t}\}_{j \in J_t}$. Dado $t > 0$, fixemos $Q_0 = Q_{j_0, 2^{-4}t}$ e tomemos $A > 0$. Procedemos como em 3.1. Então, obtemos 3.1(5):

$$\sum_{\{j \in J_t : Q_{j,t} \subset Q_0\}} \sigma(Q_{j,t}) \leq \frac{2}{A} \sigma(Q_0).$$

Usando o fato que $w \in A_\infty(\mathcal{A})$, concluímos da definição da classe $A_\infty(\mathcal{A})$ que existem $\delta > 0$ e $C > 0$ tais que, se $Q \in \mathcal{A}$ e B é um subconjunto mensurável de Q, então

$$\frac{w(B)}{w(Q)} \leq C \Big(\frac{\sigma(B)}{\sigma(Q)} \Big)^\delta.$$

Tomemos, em particular, $B = \bigcup_{Q_{j,t} \subset Q_0} Q_{j,t}$. Então, por 3.1(5), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\{j \in J_t : Q_{j,t} \subset Q_0\}} \frac{w(Q_{j,t})}{w(Q_0)} &= \frac{w(B)}{w(Q_0)} \\
&\leq C \Big(\frac{\sigma(B)}{\sigma(Q_0)} \Big)^\delta \\
&= C \Big(\sum_{\{j \in J_t : Q_{j,t} \subset Q_0\}} \frac{\sigma(Q_{j,t})}{\sigma(Q_0)} \Big)^\delta \leq C \Big(\frac{2}{A} \Big)^\delta,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\sum_{\{j \in J_t : Q_{j,t} \subset Q_0\}} w(Q_{j,t}) \leq C \Big(\frac{2}{A} \Big)^\delta w(Q_0).$$

Somando sobre todos os possíveis $Q_0' s$, obtemos

$$\sum_{j \in J_t} w(Q_{j,t}) \leq w(F_{t/A}) + C \Big(\frac{2}{A} \Big)^\delta \sum_{k \in J_{2^{-4}t}} w(Q_{k, 2^{-4}t}).$$

Como $M_d f \in L^{p_0}_w(S^2)$, podemos mostrar, como na demonstração do Teorema 3.1, que

$$I_N = \int_0^N pt^{p-1} w(E_t)dt < \infty,$$

para todo $N > 0$. Agora, a demonstração continua praticamente a mesma do teorema anterior. Basta trocar a medida σ pela medida w.

3.3. DEFINIÇÃO. Seja T um operador linear definido em $L^\infty(S^2)$ com valores no conjunto das funções mensuráveis de S^2 em $\mathbb{R}$. Dizemos que T é do tipo $(L^\infty(S^2), BMO_d)$ se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|Tf\|_{BMO_d} \leq C\|f\|_\infty,$$

para toda $f \in L^\infty(S^2)$.

3.4. TEOREMA. Seja w um peso da classe $A_r(\mathcal{A})$, e seja T um operador linear de $L^\infty(S^2)$ no conjunto das funções mensuráveis de S^2 em $\mathbb{R}$, do tipo (r,r) com respeito a w, para algum $1 < r < \infty$, e do tipo $(L^\infty(S^2), BMO_d)$. Então T é do tipo (p,p) com respeito a w para todo $r \leq p \leq \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Como T é um operador do tipo (r,r) com respeito a w, do tipo $(L^\infty(S^2), BMO_d)$, e por III-3.9 existe uma constante C tal que, para todas $f, g \in L^\infty(S^2)$, temos:

$$\begin{aligned}
\|M_d g\|_{r,w} &\leq C\|g\|_{r,w}, \\
\|Tf\|_{r,w} &\leq C\|f\|_{r,w}, \\
\|Tf\|_{BMO_d} &\leq C\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Logo, por 1.2(3), temos que

$$\begin{aligned}
\|(M_d^\# \circ T)f\|_{r,w} &= \|M_d^\#(Tf)\|_{r,w} \\
&\leq 2\|M_d(Tf)\|_{r,w} \\
&\leq 2C\|Tf\|_{r,w} \\
&\leq 2C^2\|f\|_{r,w}
\end{aligned}$$

e

$$\|(M_d^\# \circ T)f\|_\infty = \|M_d^\#(Tf)\|_\infty = \|Tf\|_{BMO_d} \leq C\|f\|_\infty,$$

para toda $f \in L^\infty(S^2)$, isto é, o operador $M_d^\# \circ T$ é do tipo (r,r) com respeito a w e do tipo (∞,∞) e, portanto, do tipo (∞,∞) com respeito a w, pela Observação 2.2.

Como $M_d^\# \circ T$ é um operador sublinear de $L_w^\infty(S^2) = L^\infty(S^2)$ no conjunto das funções mensuráveis de S^2 em $I\!R$, dos tipos (r,r) e (∞,∞) com respeito a w, então o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz permite-nos concluir que, para todo $r \leq p \leq \infty$, existe uma constante $D_{p,w}$, dependendo somente de p e w, tal que

$$\|M^\# \circ T(f)\|_{p,w} \leq D_{p,w}\|f\|_{p,w},$$

para toda $f \in L_w^\infty(S^2)$.

Por outro lado, para toda $f \in L_w^\infty(S^2)$, temos

$$\|M_d(Tf)\|_{r,w} \leq C\|Tf\|_{r,w} \leq C^2\|f\|_{r,w} < \infty.$$

Logo, por II-1.9(2) e pelo Teorema 3.2., temos

$$\|Tf\|_{p,w} \leq \|M_d(Tf)\|_{p,w} \leq C_{p,w}\|M_d^\#(Tf)\|_{p,w} \leq C_{p,w}D_{p,w}\|f\|_{p,w},$$

para toda $f \in L_w^\infty(S^2)$, isto é, T é do tipo (p,p) com respeito a w.

4. A FUNÇÃO MAXIMAL SHARP E A DESIGUALDADE DE FEFFERMAN-STEIN

4.1. DEFINIÇÃO. Seja $f \in L^1(S^2)$. As funções maximais sharp $M^\#(f)$ e $M_1^\#(f)$ são definidas para $x \in S^2$, por

$$M^\#(f)(x) = \sup_{\ell>0}\frac{1}{\sigma(B_2'(x,\ell))}\int_{B_2'(x,\ell)} |\, f(y) - f_{B_2'(x,\ell)} \,|\, d\sigma(y)$$

e

$$M_1^\#(f)(x) = \sup_{B'}\frac{1}{\sigma(B)}\int_{B'} |\, f(y) - f_{B'} \,|\, d\sigma(y),$$

onde o supremo é tomado sobre todos os $B' = B_2'(t,\ell)$, com $\ell > 0$ e $t \in S^2$ tais que $x \in B_2'(t,\ell)$. $f_{B_2'(x,\ell)}$ denota a média de f sobre a bola $B_2'(x,\ell)$, isto é,

$$f_{B_2'(x,\ell)} = \frac{1}{\sigma(B_2'(x,\ell))}\int_{B_2'(x,\ell)} f(y)d\sigma(y).$$

4.2. LEMA. Seja $f \in L^1(S^2)$. Então, para todo $x \in S^2$,

$$M_1^{\#} f(x) \leq 8M^{\#} f(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\ell > 0$ e seja $t \in B_2'(x,\ell)$. Se $x \in B_2'(t,\ell)$, então $B_2'(t,\ell) \subset B_2'(x,2\ell)$. Portanto, $\sigma(B_2'(x,2\ell)) = 4\sigma(B_2'(t,\ell))$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma(B_2'(t,\ell))}\int_{B_2'(t,\ell)} \mid f(y) - f_{B_2'(t,\ell)} \mid d\sigma(y) \leq \\
&\leq \frac{1}{\sigma(B_2'(t,\ell))}\int_{B_2'(t,\ell)} \mid f(y) - f_{B_2'(x,2\ell)} \mid d\sigma(y) + \mid f_{B_2'(x,2\ell)} - f_{B_2'(t,\ell)} \mid \\
&= \frac{1}{\sigma(B_2'(t,\ell))}\int_{B_2'(t,\ell)} \mid f(y) - f_{B_2'(x,2\ell)} \mid d\sigma(y) \\
&+ \left| \frac{1}{\sigma(B_2'(t,\ell))}\int_{B_2'(t,\ell)} f_{B_2'(x,2\ell)} d\sigma(y) - \frac{1}{\sigma(B_2'(t,\ell))}\int_{B_2'(t,\ell)} f(y) d\sigma(y) \right| \\
&\leq \frac{2}{\sigma(B_2'(t,\ell))}\int_{B_2'(t,\ell)} \mid f(y) - f_{B_2'(x,2\ell)} \mid d\sigma(y) \\
&\leq \frac{8}{\sigma(B_2'(x,2\ell))}\int_{B_2'(x,2\ell)} \mid f(y) - f_{B_2'(x,2\ell)} \mid d\sigma(y) \\
&\leq 8M^{\#} f(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $M_1^{\#} f(x) \leq 8M^{\#} f(x)$.

4.3. LEMA. Seja $f \in L^1(S^2)$. Então, para todo $x \in S^2$, temos

$$M_d^{\#} f(x) \leq 8\pi^2 M_1^{\#} f(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Dado $Q \in \mathcal{A}$, por I-2.11.(b), existem $t \in Q$ e $\ell > 0$ tais que $Q \subset B_2'(t,\ell)$ e $\sigma(B_2'(t,\ell)) \leq 4\pi^2 \sigma(Q)$. Então,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \mid f(y) - f_Q \mid d\sigma(y) \leq \\
&\leq \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \mid f(y) - f_{B_2'(t,\ell)} \mid d\sigma(y) + \mid f_{B_2'(t,\ell)} - f_Q \mid \\
&= \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \mid f(y) - f_{B_2'(t,\ell)} \mid d\sigma(y) + \left| \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q f_{B_2'(t,\ell)} d\sigma(y) - \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q f(y) d\sigma(y) \right| \\
&\leq \frac{2}{\sigma(Q)}\int_Q \mid f(y) - f_{B_2'(t,\ell)} \mid d\sigma(y) \\
&\leq \frac{8\pi^2}{\sigma(B_2'(t,\ell))}\int_{B_2'(t,\ell)} \mid f(y) - f_{B_2'(t,\ell)} \mid d\sigma(y) \\
&\leq 8\pi^2 M_1^{\#} f(x).
\end{aligned}$$

Logo, $M_d^{\#}f(x) \leq 8\pi^2 M_1^{\#}f(x)$.

4.4. TEOREMA. Sejam $0 < p_0 < \infty$ e $w \in A_q(S^2)$ para algum $1 < q < \infty$. Então, para todo $p_0 \leq p < \infty$, existe uma constante $K_{p,w}$, dependendo somente de p e w, tal que, se $f \in L^1(S^2)$ satisfaz $Mf \in L_w^{p_0}(S^2)$, então

$$\int_{S^2}(Mf(x))^p w(x)d\sigma(x) \leq K_{p,w}\int_{S^2}(M^{\#}f(x))^p w(x)d\sigma(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Fixemos $p_0 \leq p < \infty$, e seja $f \in L^1(S^2)$ tal que $Mf \in L_w^{p_0}(S^2)$. Agora, pela definição de peso da classe $A_q(S^2)$, temos que $w \circ u \in A_q(S^2)$ e $K(q,w) = K(q, w \circ u)$, para todo $u \in SO(3)$. Portanto, por III-4.3, temos que $w \circ u \in A_q(\mathcal{A})$ e

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q w \circ u \; d\sigma\right)\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q (w \circ u)^{-\frac{1}{q-1}} d\sigma\right)^{q-1} \leq (4\pi^2)^p K(q,w),$$

para todo $u \in SO(3)$ e todo $Q \in \mathcal{A}$. Como $M(f \circ u)(u^{-1}x) = Mf(x)$, temos que

$$(2) \qquad \begin{aligned} \int_{S^2}(M(f \circ u)(x))^{p_0} w \circ u(x)d\sigma(x) &= \int_{S^2}(M(f \circ u))(u^{-1}x)^{p_0} w(x)d\sigma(x) \\ &= \int_{S^2}(Mf(x))^{p_0} w(x)d\sigma(x) < \infty. \end{aligned}$$

Assim, por (1), (2) e pelo Teorema 3.2., temos que existe uma constante $C_{p,w}$, dependendo somente de p e w, tal que

$$(3) \qquad \int_{S^2}(M_d(f \circ u)(x))^p w \circ u(x)d\sigma(x) \leq C_{p,w}\int_{S^2}(M_d^{\#}(f \circ u)(x))^p w \circ u(x)d\sigma(x).$$

Por III-4.4(2), temos

$$(4) \qquad Mf(x) \leq 11\int_{SO(3)} M_d(f \circ u)(u^{-1}x)du.$$

Portanto, por 4.2, 4.3, (3), (4), pela Desigualdade de Jensen e pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_{S^2}(Mf(x))^p w(x)d\sigma(x) &\leq \\ &\leq \int_{S^2}\left(11\int_{SO(3)} M_d(f \circ u)(u^{-1}x)du\right)^p w(x)d\sigma(x) \\ (5) \qquad &\leq 11^p\int_{SO(3)}\int_{S^2}(M_d(f \circ u)(x))^p w \circ u(x)d\sigma(x)du \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 11^pC_{p,w}\int_{S^2}\int_{SO(3)}(M_d^\#(f\circ u)(x))^p w\circ u(x)dud\sigma(x)\\
&\leq (8\pi^2)^p 11^p C_{p,w}\int_{SO(3)}\int_{S^2}(M_1^\#(f\circ u)(u^{-1}x))^p w(x)d\sigma(x)du\\
&\leq 8^p(8\pi^2)^p 11^p C_{p,w}\int_{SO(3)}\int_{S^2}(M^\#(f\circ u)(u^{-1}x))^p w(x)d\sigma(x)du.
\end{aligned}
$$

Agora, temos que

$$
\begin{aligned}
(f\circ u)_{B_2'(u^{-1}x,\ell)} &= \frac{1}{\sigma(B_2'(u^{-1}x,\ell))}\int_{B_2'(u^{-1}x,\ell)} f(uy)d\sigma(y)\\
&= \frac{1}{\sigma(B_2'(x,\ell))}\int_{B_2'(x,\ell)} f(z)d\sigma(z)\\
&= f_{B_2'(x,\ell)}
\end{aligned}
$$

e, assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma(B_2'(u^{-1}x,\ell))}\int_{B_2'(u^{-1}x,\ell)} \mid (f\circ u)(y) &- (f\circ u)_{B_2'(u^{-1}x,\ell)} \mid d\sigma(y) =\\
&= \frac{1}{\sigma(B_2'(x,\ell))}\int_{B_2'(x,\ell)} \mid f(y)-f_{B_2'(x,\ell)} \mid d\sigma(y).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
(6) \qquad M^\#(f\circ u)(u^{-1}x) = M^\# f(x).
$$

Logo, de (5) e (6) obtemos o resultado desejado.

5. O ESPAÇO BMO

5.1. DEFINIÇÃO. Seja w um peso. O espaço $BMO(w)$ é formado pelas funções $f\in L^1(S^2)$ tais que $M^\# f\in L^\infty_w(S^2)$. Se $f\in BMO(w)$, então definimos $\|f\|_{BMO(w)} = \|M^\# f\|_{\infty,w}$.

Observemos que, dado um peso w, como $w(E)=\int_E w(x)d\sigma(x)$ para todo subconjunto mensurável $E\subset S^2$, temos que $w(E)=0$ se e somente se $\sigma(E)=0$. Portanto, se definirmos o espaço BMO como sendo o conjunto formado pelas funções $f\in L^1(S^2)$ tais que $M^\# f\in L^\infty(S^2)$, e definirmos $\|f\|_{BMO}=\|M^\# f\|_\infty$, teremos que os espaços $BMO(w)$

e BMO coincidem.

5.2. OBSERVAÇÃO. A aplicação $f \mapsto \|f\|_{BMO}$ é uma semi-norma em BMO, e $\|f\|_{BMO} = 0$ se e somente se f é constante. A demonstração é idêntica à do Lema 2.2 deste capítulo. Por isso a omitiremos aqui. Consideraremos, a partir de agora, BMO como sendo o espaço quociente em relação às funções constantes e, assim, a aplicação $f \mapsto \|f\|_{BMO}$ passará a ser uma norma em BMO.

5.3. DEFINIÇÃO. Seja T um operador linear definido em $L^\infty(S^2)$ com valores no conjunto das funções mensuráveis de S^2 em $I\!R$. Diremos que T é do tipo $(L^\infty(S^2), BMO)$ se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\|Tf\|_{BMO} \leq C\|f\|_\infty,$$

para toda $f \in L^\infty(S^2)$.

5.4. TEOREMA. Seja w um peso da classe $A_r(S^2)$, e seja T um operador linear definido em $L^\infty(S^2)$ com valores no conjunto das funções mensuráveis de S^2 em $I\!R$, do tipo (r, r) com respeito a w, para algum $1 < r < \infty$, e do tipo $(L^\infty(S^2), BMO)$. Então T é do tipo (p, p) com respeito a w, para todo $r \leq p < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Como T é um operador do tipo (r, r) com respeito a w, do tipo $(L^\infty(S^2), BMO)$, por III-4.4 existe uma constante C tal que, para todas $f, g \in L^\infty(S^2)$, temos

$$\begin{aligned} \|Mg\|_{r,w} &\leq C\|g\|_{r,w}, \\ \|Tf\|_{r,w} &\leq C\|f\|_{r,w}, \\ \|Tf\|_{BMO} &\leq C\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Por demonstração idêntica à do Teorema 1.2, temos que $M^\# f(x) \leq 2Mf(x)$, para toda $f \in L^1(S^2)$. Então,

$$\begin{aligned} \|(M^\# \circ T)f\|_{r,w} &= \|M^\#(Tf)\|_{r,w} \\ &\leq 2\|M(Tf)\|_{r,w} \\ &\leq 2C\|Tf\|_{r,w} \\ &\leq 2C^2\|f\|_{r,w} \end{aligned}$$

e

$$\|(M^{\#} \circ T)f\|_{\infty} = \|M^{\#}(Tf)\|_{\infty} = \|Tf\|_{BMO} \leq C\|f\|_{\infty},$$

para toda $f \in L^{\infty}(S^2)$, isto é, o operador $M^{\#} \circ T$ é dos tipos (r, r) e (∞, ∞) com respeito a w. Como $M^{\#} \circ T$ é um operador sublinear de $L^{\infty}_{w}(S^2) = L^{\infty}(S^2)$ no conjunto das funções mensuráveis de S^2 em $I\!R$, dos tipos (r, r) e (∞, ∞) com respeito a w, o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz escrito no resultado 2 do Apêndice permite-nos concluir que, para todo $r \leq p \leq \infty$, existe uma constante $D_{p,w}$, dependendo somente de p e w, tal que

$$\|M^{\#} \circ T(f)\|_{p,w} \leq D_{p,w}\|f\|_{p,w}$$

para toda $f \in L^{\infty}_{w}(S^2)$.

Por outro lado, para toda $f \in L^{\infty}_{w}(S^2)$, temos

$$\|M(Tf)\|_{r,w} \leq C\|Tf\|_{r,w} \leq C^2\|f\|_{r,w} < \infty.$$

Logo, por II-1.9(2), III-4.3(2), III-4.3(3) e pelo Teorema 4.4, temos:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{p,w} &\leq \|M_d(Tf)\|_{p,w} \leq 4\pi^2\|M_1(Tf)\|_{p,w} \leq 16\pi^2\|M(Tf)\|_{p,w} \\ &\leq 16\pi^2 K_{p,w}\|M^{\#}(Tf)\|_{p,w} \leq 16\pi^2 K_{p,w} D_{p,w}\|f\|_{p,w} \end{aligned}$$

para toda $f \in L^{\infty}_{w}(S^2)$, isto é, T é do tipo (p, p) com respeito a w.

CAPÍTULO V

MEDIDAS DE CARLESON E PESOS DA CLASSE A_∞ SOBRE S^2

O objetivo deste capítulo é estudar resultados obtidos por Bordin e Tozoni em [2] para a esfera S^n, no caso particular $n = 2$. Resultados análogos para o caso do $\mathbb{R}^n$ foram estudados por Ruiz e Torrea em [16]. O caso do S^1 sem pesos foi também estudado por Carleson em [5].

Na primeira seção definimos um operador maximal de tipo diádico $\mathcal{M}_d$ usando as partições da esfera S^2 introduzidas no Capítulo I. Obtemos, então, uma condição necessária e suficiente sobre um peso w e sobre uma medida μ definida sobre os borelianos de $\widetilde{S^2} = S^2 \times [0,1]$, para que o operador $\mathcal{M}_d$ seja limitado de $L^p_w(S^2)$ em $L^p(\widetilde{S^2}, \mu)$.

Na segunda seção definimos um operador maximal $\mathcal{M}$ utilizando as médias de uma função sobre bolas de S^2. Aplicamos o resultado principal da seção anterior e obtemos uma condição necessária e suficiente sobre um peso w e sobre uma medida μ definida sobre os borelianos de $\widetilde{S^2}$, para que o operador $\mathcal{M}$ seja limitado de $L^p_w(S^2)$ em $L^p(\widetilde{S^2}, \mu)$. Em particular, mostramos que, no caso $w \equiv 1$, a condição obtida é a condição de Carleson para a esfera S^2.

Na terceira seção definimos o núcleo de Poisson para a esfera S^2 e a integral de Poisson u_f de uma função real e integrável f sobre S^2. Mostramos que $| u_f | \leq 4\mathcal{M}f$ e assim, aplicando o resultado principal da seção anterior, obtemos uma condição suficiente para que o operador $f \mapsto u_f$ seja limitado de $L^p_w(S^2)$ em $L^p(\mathbb{B}, \mu)$. No caso $w \equiv 1$, mostramos que a condição obtida também é necessária.

1. UM OPERADOR MAXIMAL DE TIPO DIÁDICO

1.1. DEFINIÇÃO. Para cada $x \in S^2$ e $1-\sqrt{2} \le r \le 1$, definimos a bola $U(x,r)$ em S^2 por

$$U(x,r) = \{y \in S^2 : (1-r)^2 \ge 1 - x.y\}.$$

Se $U = U(x,r)$, escrevemos $\widetilde{U} = U(x,r) \times [0,1]$ para $1-\sqrt{2} \le r \le 0$ e $\widetilde{U} = U(x,r) \times [r,1]$ para $0 \le r \le 1$. Também escrevemos $\widetilde{S}^2 = S^2 \times [0,1]$.

1.2. OBSERVAÇÃO. Se $\mathbb{1} = (1,0,0)$, então

$$U(\mathbb{1},r) = \{\xi_2(\theta) : 0 \le \theta_1 \le arc\, cosr(2-r)\}.$$

De fato, se $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, temos:

$$\begin{aligned} U(\mathbb{1},r) &= \{y \in S^2 : (1-r)^2 \ge 1 - y \cdot \mathbb{1}\} \\ &= \{(y_1,y_2,y_3) \in S^2 : (1-r)^2 \ge 1 - y_1\} \\ &= \{\xi_2(\theta) \in S^2 : (1-r)^2 \ge 1 - cos\theta_1\} \\ &= \{\xi_2(\theta) \in S^2 : cos\theta_1 \ge r(2-r)\} \\ &= \{\xi_2(\theta) \in S^2 : 0 \le \theta_1 \le arc\, cosr(2-r)\}. \end{aligned}$$

1.3. OBSERVAÇÃO. Dados $x \in S^2$ e $1-\sqrt{2} \le r \le 1$, temos

$$U(x,r) = B_2'(x, \sqrt{2} \mid 1-r \mid).$$

De fato, para todos $x = (x_1,x_2,x_3)$, $y = (y_1,y_2,y_3) \in S^2$, temos

$$\begin{aligned} \mid x-y \mid_2^2 &= (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ &= 2(1 - x \cdot y). \end{aligned} \tag{1}$$

Disso, segue que

$$\begin{aligned} y \in U(x,r) &\Leftrightarrow (1-r)^2 \ge 1 - x \cdot y \\ &\Leftrightarrow (1-r)^2 \ge \frac{1}{2} \mid x-y \mid_2^2 \\ &\Leftrightarrow \mid x-y \mid_3^2 \le 2(1-r)^2 \\ &\Leftrightarrow \mid x-y \mid_3 \le \sqrt{2} \mid 1-r \mid \\ &\Leftrightarrow y \in B_2'(x, \sqrt{2} \mid 1-r \mid). \end{aligned}$$

Isto é, $U(x,r) = B'_2(x, \sqrt{2} \mid 1 - r \mid)$. Se tomarmos os intervalos I_j^k como em I-2.12 e, a partir daí, fizermos decomposições de S^2 como no Capítulo I e denotarmos por $\mathcal{A}'_k$ o k-ésimo estágio da decomposição e $\mathcal{A}' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}'_k$, obteremos o Teorema 2.11 do Capítulo I da seguinte forma:

TEOREMA I-2.11. **(a)** Se $k \geq 0$, $Q_1 \in \mathcal{A}'_k$ e $Q_2 \in \mathcal{A}'_{k+1}$ com $Q_2 \subset Q_1$, então

$$\sigma(Q_1) \leq 8\sigma(Q_2)$$

(b) Para todo $Q \in \mathcal{A}'$, existem $x \in Q$ e $1 - \sqrt{2} \leq r < 1$ tais que $Q \subset U(x,r)$ e

$$\sigma(U(x,r)) \leq 4\pi^2\sigma(Q)$$

(c) Para todo $x \in S^2$ e todo $1 - \sqrt{2} \leq r < 1$, existem $Q \in \mathcal{A}'$ e $u \in SO(3)$ tais que $U(x,r) \subset u(Q)$ e

$$\sigma(Q) \leq 11\sigma(U(x,r)).$$

1.4. DEFINIÇÃO. Definimos a função decrescente $\alpha : [1 - \sqrt{2}, 1] \to [0, 4\pi]$ por $\alpha(r) = \sigma(U(\mathbb{1}, r))$.

1.5. DEFINIÇÃO. Seja $Q \in \mathcal{A}', Q \neq S^2$. Definimos o subconjunto $\tilde{Q}$ de $\tilde{S}^2$ por $\tilde{Q} = Q \times [\alpha^{-1}(\sigma(Q)), 1]$.

1.6. DEFINIÇÃO. Se f é uma função real e integrável sobre S^2, definimos, para cada $(x,r) \in \tilde{S}^2$,

$$\mathcal{M}_d f(x,r) = \sup_{\substack{x \in Q \in \mathcal{A}' \\ \sigma(Q) \geq \alpha(r)}} \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q \mid f(y) \mid d\sigma(y).$$

1.7. LEMA. Seja w um peso, e seja A um subconjunto mensurável de S^2. Se $1 < p < \infty$ e $w^{-1}\chi_A \notin L^{p'}_{w}(S^2)$, então existe uma função positiva $f \in L^p_w(S^2)$ tal que

$$\int_A f(x) d\sigma(x) = \infty.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja ψ o funcional linear sobre $L^p_w(S^2)$ dado por

$$\psi(g) = \int_{S^2} (w^{-1}\chi_A) g w d\sigma = \int_A g d\sigma.$$

Como $w^{-1}\chi_A \notin L^{p'}_{w'}(S^2)$, segue pelo Teorema de Representação de Riesz que ψ não é contínuo. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada inteiro positivo m, existe $g_m \in L^p_w(S^2)$ tal que $\|g_m\|_{p,w} \leq 2^{-m}$ e $| \psi(g_m) | \geq \varepsilon$.

Seja $f_m(x) = | g_1(x) | + \cdots + | g_m(x) |$. Então, para todos $m, k \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\|f_{m+k} - f_m\|_{p,w} &= \| \, | g_{m+1} | + \cdots + | g_{m+k} | \, \|_{p,w} \\
&\leq \|g_{m+1}\|_{p,w} + \cdots + \|g_{m+k}\|_{p,w} \\
&\leq 2^{-(m+1)} + \cdots + 2^{-(m+k)} < 2^{-m}.
\end{aligned}$$

Assim, (f_m) é uma seqüência de Cauchy em $L^p_w(S^2)$ e, portanto, existe $f \in L^p_w(S^2)$ tal que $f_m \to f$ em $L^p_w(S^2)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\psi(f_m) &= \int_A f_m d\sigma \\
&= \int_A | g_1 | d\sigma + \cdots + \int_A | g_m | d\sigma \\
&\geq \left| \int_A g_1 d\sigma \right| + \cdots + \left| \int_A g_m d\sigma \right| \\
&= | \psi(g_1) | + \cdots + | \psi(g_m) | \geq m\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mas $f_m \uparrow f$ q.s. e, assim, pelo Teorema da Convergência Monótona obtemos

$$\int_A f d\sigma = \psi(f) = \lim_{m\to\infty} \psi(f_m) \geq \lim_{m\to\infty} m\varepsilon = \infty.$$

1.8. TEOREMA. Sejam μ uma medida sobre $\widetilde{S}^2, 1 < p < \infty$ e w um peso tal que $w^{1-p'}, p' = p/(p-1)$, satisfaz a seguinte condição: existe $K > 0$ tal que, se $Q_k \in \mathcal{A}'_k$ e $Q_{k+1} \in \mathcal{A}'_{k+1}$ com $Q_{k+1} \subset Q_k$, então $w^{1-p'}(Q_k) \leq K w^{1-p'}(Q_{k+1})$. As seguintes condições são equivalentes:

(**a**) Existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda $f \in L^p_w(S^2)$,

$$\int_{\widetilde{S}^2} (\mathcal{M}_d f(x,r))^p d\mu(x,r) \leq C \int_{S^2} | f(x) |^p w(x) d\sigma(x).$$

(b) Existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $Q \in \mathcal{A}'$,

$$\int_{\widetilde{Q}} (\mathcal{M}_d(w^{1-p'}\chi_Q)(x,r))^p d\mu(x,r) \leq C \int_Q w^{1-p'}(x)d\sigma(x) < \infty.$$

DEMONSTRAÇÃO. (a) $\Rightarrow$ (b): Suponhamos que exista $Q \in \mathcal{A}'$ tal que

$$\int_Q w^{1-p'}(x)d\sigma(x) = \infty.$$

Então, $w^{-1}\chi_Q \notin L^{p'}_w(S^2)$, já que

$$\int_{S^2} (w^{-1}(x)\chi_Q(x))^{p'} w(x)d\sigma(x) = \int_Q w^{1-p'}(x)d\sigma(x).$$

Assim, pelo Lema 1.7, existe uma função positiva $f \in L^p_w(S^2)$ tal que

$$\int_Q f(x)d\sigma(x) = \infty.$$

Logo, $\mathcal{M}_d f(x,r) = \infty$, para todo $(x,r) \in \widetilde{S^2}$, o que contradiz a condição (i). Portanto,

$$\int_Q w^{1-p'}(x)d\sigma(x) < \infty,$$

para todo $Q \in \mathcal{A}'$. Para obter a primeira desigualdade em (b) basta escolher em (a) $f(x) = w^{1-p'}(x)\chi_Q(x)$.

(b) $\Rightarrow$ **(a)**: Fixemos $f \in L^p_w(S^2)$ e, para cada $k \in \boldsymbol{Z}$, seja Ω_k o conjunto

$$\Omega_k = \{(x,r) \in \widetilde{S^2} : \mathcal{M}_d f(x,r) > 2^k\}.$$

Para cada $k \in \boldsymbol{Z}$, denotamos por C_k^0 a família formada por todos os $Q \in \mathcal{A}'$ tais que

$$| f |_Q = \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q | f(y) | d\sigma(y) > 2^k.$$

Como para todo $Q \in \mathcal{A}'_{i+1}$ existe $Q' \in \mathcal{A}'_i$ tal que $Q \subset Q'$, então todo elemento $Q \in C^0_k$ está contido em um elemento maximal $Q' \in C^0_k$. Vamos denotar por C_k a família $\{Q^k_j : j \in J_k\}$ formada por todos os elementos maximais $Q \in C^0_k$. Como para cada $i \geq 1$ $\mathcal{A}'_i$ é uma partição de S^2 e todos os elementos de C_k são maximais, podemos concluir que os conjuntos Q^k_j, $j \in J_k$, são disjuntos. Portanto, os conjuntos $\tilde{Q}^k_j$, $j \in J_k$ são também disjuntos, e

$$\Omega_k = \bigcup_{j \in J_k} \tilde{Q}^k_j.$$

Agora, para cada $k \in \boldsymbol{Z}$ e $j \in J_k$, seja

$$E^k_j = \tilde{Q}^k_j \setminus \Omega_{k+1}.$$

Então, os conjuntos E^k_j e $E^{k'}_i$ são disjuntos, para $(k, j) \neq (k', i)$, e

$$\begin{aligned} \{(x, r) : \mathcal{M}_d f(x, r) > 0\} &= \bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} (\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}) \\ &= \bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} \bigcup_{j \in J_k} E^k_j. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (1) \qquad \int_{\widetilde{S^2}} (\mathcal{M}_d f(x, r))^p d\mu(x, r) &= \sum_{k,j} \int_{E^k_j} (\mathcal{M}_d f(x, r))^p d\mu(x, r) \\ &\leq \sum_{k,j} \mu(E^k_j)(2^{k+1})^p \\ &= 2^p \sum_{k,j} \mu(E^k_j)(2^k)^p \\ &\leq 2^p \sum_{k,j} \mu(E^k_j)\Big(\frac{1}{\sigma(Q^k_j)} \int_{Q^k_j} \mid f(x) \mid d\sigma(x)\Big)^p. \end{aligned}$$

Vamos introduzir as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \nu(x) &= w^{1-p'}(x), \\ \nu(A) &= \int_A \nu(x) d\sigma(x), \\ \gamma_{k,j} &= \mu(E^k_j)\Big(\frac{\nu(Q^k_j)}{\sigma(Q^k_j)}\Big)^p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{k,j} &= \left(\frac{1}{\nu(Q_j^k)}\int_{Q_j^k}\frac{|f(x)|}{\nu(x)}\nu(x)d\sigma(x)\right)^p, \\
X &= \{(k,j) : k \in \boldsymbol{Z}, \quad j \in J_k\}, \\
\Gamma(\lambda) &= \{(k,j) \in X : g_{k,j} > \lambda\}.
\end{aligned}$$

Seja γ a medida sobre X tal que $\gamma((k,j)) = \gamma_{k,j}$, e seja g a função definida sobre X por $g((k,j)) = g_{k,j}$. Temos que

$$\gamma_{k,j}g_{k,j} = \mu(E_j^k)\left(\frac{1}{\sigma(Q_j^k)}\int_{Q_j^k}|f(x)|\,d\sigma(x)\right)^p$$

e segue por (1) e pelo resultado 1 do Apêndice que

$$\begin{aligned}
(2) \qquad \int_{\widetilde{S}^2}(\mathcal{M}_d f(x,r))^p d\mu(x,r) &\leq 2^p\sum_{k,j}\gamma_{k,j}g_{k,j} \\
&= 2^p\int_X g\,d\gamma \\
&= 2^p\int_0^\infty \gamma(\Gamma(\lambda))d\lambda \\
&= 2^p\int_0^\infty\Big(\sum_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)}\gamma_{k,j}\Big)d\lambda \\
&= 2^p\int_0^\infty\sum_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)}\int_{E_j^k}\left(\frac{\nu(Q_j^k)}{\sigma(Q_j^k)}\right)^p d\mu(x,r)d\lambda.
\end{aligned}$$

Para cada $\lambda > 0$, seja $\{Q_i^\lambda : i \in I_\lambda\}$ a família formada por todos os elementos maximais da família

$$\{Q_j^k : (k,j) \in \Gamma(\lambda)\} = \left\{Q_j^k : \frac{1}{\nu(Q_j^k)}\int_{Q_j^k}\frac{|f(x)|}{\nu(x)}\nu(x)d\sigma(x) > \lambda^{1/p}\right\}.$$

Se $Q_j^k \subset Q_i^\lambda$ e $(x,r) \in E_j^k$, então $x \in Q_j^k$ e $r \in [\alpha^{-1}(\sigma(Q_j^k)),1]$. Portanto, $\sigma(Q_j^k) \geq \alpha(r)$ e, assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_d(\nu\chi_{Q_i^\lambda})(x,r) &= \sup_{\substack{x\in Q\in\mathcal{A}' \\ \sigma(Q)\geq\alpha(r)}}\frac{\nu(Q\cap Q_i^\lambda)}{\sigma(Q)} \\
&\geq \frac{\nu(Q_j^k)}{\sigma(Q_j^k)}.
\end{aligned}$$

Portanto, se $Q_j^k \subset Q_i^\lambda$, obtemos

$$(3) \qquad \int_{E_j^k}\left(\frac{\nu(Q_j^k)}{\sigma(Q_j^k)}\right)^p d\mu(x,r) \leq \int_{E_j^k}(\mathcal{M}_d(\nu\chi_{Q_i^\lambda})(x,r))^p d\mu(x,r).$$

Lembrando do fato que os conjuntos E_j^k são disjuntos, segue de (2), (3), do fato que $\nu = w^{1-p'}$ e da hipótese, que

$$
\begin{aligned}
(4) \quad \int_{\widetilde{S^2}}(\mathcal{M}_d f(x,r))^p d\mu(x,r) &\leq 2^p\int_0^\infty \sum_{i\in I_\lambda}\sum_{\substack{(k,j)\in\Gamma(\lambda)\\ Q_j^k\subset Q_i^\lambda}}\int_{E_j^k}(\mathcal{M}_d(\nu\chi_{Q_i^\lambda})(x,r))^p d\mu(x,r)\\
&\leq 2^p\int_0^\infty \sum_{i\in I_\lambda}\int_{\widetilde{Q}_i^\lambda}(\mathcal{M}_d(\nu\chi_{Q_i^\lambda})(x,r))^p d\mu(x,r)\\
&\leq C2^p\int_0^\infty \sum_{i\in I_\lambda}\int_{Q_i^\lambda}\nu(x)d\sigma(x)\\
&= C2^p\int_0^\infty \nu\Big(\bigcup_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)} Q_j^k\Big)d\sigma(x).
\end{aligned}
$$

Pela hipótese sobre $\nu = w^{1-p'}$ podemos definir o operador $M_{d,\nu}$ como em II-1.11 e, pela definição de $\Gamma(\lambda)$, segue que

$$(5) \qquad \bigcup_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)} Q_j^k \subset \left\{x\in S^2 : M_{d,\nu}\Big(\frac{|f|}{\nu}\Big)(x) > \lambda^{1/p}\right\}.$$

Por II-1.13, existe $C_p > 0$ tal que $\|M_{d,\nu}h\|_{p,\nu} \leq C_p\|h\|_{p,\nu}$ para toda $h \in L^p_\nu(S^2)$. Então, por (4) e (5)

$$
\begin{aligned}
\int_{\widetilde{S^2}}(\mathcal{M}_d f(x,r))^p d\mu(x,r) &\leq C2^p\int_0^\infty \nu\left(\left\{x : \Big(M_{d,\nu}\Big(\frac{|f|}{\nu}\Big)(x)\Big)^p > \lambda\right\}\right)d\lambda\\
&= C2^p\int_{S^2}\Big(M_{d,\nu}\Big(\frac{|f|}{\nu}\Big)(x)\Big)^p\nu(x)d\sigma(x)\\
&\leq C2^p(C_p)^p\int_{S^2}\frac{|f(x)|^p}{(\nu(x))^p}\nu(x)d\sigma(x)\\
&= C2^p(C_p)^p\int_{S^2}|f(x)|^p\, w(x).
\end{aligned}
$$

1.9. OBSERVAÇÃO. Fixemos $u \in SO(3)$, e sejam $u\mathcal{A}'_k = \{u(Q) : Q \in \mathcal{A}'_k\}$, $u\mathcal{A}' = \{u(Q) : Q \in \mathcal{A}'\}$. Então, para cada $k \geq 0$, $u\mathcal{A}'_k$ é uma partição de S^2, e I-2.11 e II-1.13 também valem, com as mesmas constantes, quando fazemos a troca de $\mathcal{A}'_k$ por $u\mathcal{A}'_k$. Se f é uma função real e integrável sobre S^2, definimos

$$\mathcal{M}_d^u = \sup_{\substack{x\in Q\in u\mathcal{A}' \\ \sigma(Q)\geq\alpha(r)}} \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \mid f(y) \mid d\sigma(y).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_d(f\circ u)(u^{-1}x,r) &= \sup_{\substack{u^{-1}x\in Q\in u\mathcal{A}' \\ \alpha(Q)\geq\alpha(r)}} \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \mid (f\circ u)(y) \mid d\sigma(y) \\
&= \sup_{\substack{x\in Q\in u\mathcal{A}' \\ \alpha(Q)\geq\alpha(r)}} \frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q \mid f(y) \mid d\sigma(y) \\
&= \mathcal{M}_d^u f(x,r)
\end{aligned}$$

e o Teorema 1.8 também é válido com a mesma demonstração e as mesmas constantes quando trocamos o operador $\mathcal{M}_d$ por $\mathcal{M}_d^u$ e a família $\mathcal{A}'_k$ por $u\mathcal{A}'_k$.

2. A LIMITAÇÃO DO OPERADOR MAXIMAL $\mathcal{M}$

2.1. DEFINIÇÃO. Seja f uma função real e integrável sobre S^2. Para todo $(x,r)\in\widetilde{S^2}$, definimos o operador maximal $\mathcal{M}$ por

$$\mathcal{M}f(x,r) = \sup_{1-\sqrt{2}\leq s\leq r} \frac{1}{\sigma(U(x,s))}\int_{U(x,s)} \mid f(y) \mid d\sigma(y).$$

Se $r=1$, o supremo acima é tomado sobre todos $1-\sqrt{2}\leq s<1$.

2.2. LEMA. Seja $\mathcal{M}_d^u$ o operador maximal definido na Observação 1.9. Então, para toda função real e integrável f, para todos $u\in SO(3)$ e $(x,r)\in\widetilde{S^2}$, temos

$$\text{(1)} \qquad \mathcal{M}_d^u f(x,r) \leq 16\pi^2\mathcal{M}f(x,r),$$

$$\text{(2)} \qquad \mathcal{M}f(x,r) \leq 11\int_{SO(3)} \mathcal{M}_d^u f(x,r)du.$$

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente demonstraremos (1). Vamos fixar $(x,r)\in\widetilde{S^2}$, $u\in SO(3)$ e $Q\in\mathcal{A}'$, de tal forma que $x\in u(Q)$ e $\sigma(u(Q))\geq\alpha(r)$. Por II-2.11(b) reescrito na Observação 1.3, temos que existem $z \in Q$ e $1-\sqrt{2} \leq s < 1$ tais que $Q \subset U(z,s)$ e $\sigma(U(z,s)) \leq 4\pi^2\sigma(Q)$. Seja $\ell = \sqrt{2} \mid 1 - s \mid$. Então, pela Observação 1.3, temos

$$U(uz,s) = B_2'(uz,\ell) \subset B_2'(x,2\ell) = U(x,t),$$

onde $1-\sqrt{2} \leq t < 1$ e

$$\begin{aligned}
\sigma(B_2'(x,2\ell)) &= \pi(2\ell)^2 \\
&= 4\sigma(B_2'(x,\ell)) \\
&= 4\sigma(B_2'(uz,\ell)) \\
&= 4\sigma(U(uz,s)).
\end{aligned}$$

Então, $t \leq r$ pois

$$\alpha(t) = \sigma(U(x,t)) \geq \sigma(U(uz,s)) \geq \sigma(u(Q)) \geq \alpha(r)$$

e

$$\sigma(U(x,t)) = 4\sigma(U(uz,s)) \leq 16\pi^2\sigma(u(Q)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(3) \qquad \frac{1}{\sigma(u(Q))}\int_{u(Q)} \mid f(y) \mid d\sigma(y) &\leq \frac{16\pi^2}{\sigma(U(x,t))}\int_{U(x,t)} \mid f(y) \mid d\sigma(y) \\
&\leq 16\pi^2 \mathcal{M}f(x,r),
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\mathcal{M}_d f(x,r) \leq 16\pi^2\mathcal{M}f(x,r),$$

o que demonstra (1).

Agora, vamos demonstrar (2). Fixemos $(x,r) \in \widetilde{S^2}$ e $1-\sqrt{2} \leq s \leq r$. Por II-2.11(c) reescrito na Observação 1.3, existem $Q \in \mathcal{A}'$ e $u \in SO(3)$ tais que $U(x,s) \subset u(Q)$ e $\sigma(Q) \leq 11\sigma(U(x,s))$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma(U(x,s))}\int_{U(x,s)} \mid f(y) \mid d\sigma(y) &\leq \frac{11}{\sigma(u(Q))}\int_{u(Q)} \mid f(y) \mid d\sigma(y) \\
&\leq 11\mathcal{M}_d^u f(x,r),
\end{aligned}$$

já que $\sigma(u(Q)) \geq \sigma(U(x,s)) = \alpha(s) \geq \alpha(r)$. Portanto, integrando ambos os lados da desigualdade acima sobre $SO(3)$, temos

$$\frac{1}{\sigma(U(x,s))}\int_{U(x,s)} | f(y) | \, d\sigma(y) \leq 11 \int_{SO(3)} \mathcal{M}_d^u f(x,r), du.$$

Logo,

$$\mathcal{M} f(x,r) \leq 11 \int_{SO(3)} \mathcal{M}_d^u f(x,r) du,$$

o que demonstra (2).

2.3. DEFINIÇÃO. Seja w um peso. Dizemos que $w \in A_\infty(S^2)$ se existem constantes $C > 0$ e $\delta > 0$ tais que, para toda bola U em S^2 e todo $A \subset U$ mensurável, temos

$$\frac{\sigma(A)}{\sigma(U)} \leq C\Big(\frac{w(A)}{w(U)}\Big)^\delta.$$

2.4. LEMA. Seja $w \in A_\infty(S^2)$. Então, existe $K > 0$ tal que, se $u \in SO(3)$, e $Q_k \in u\mathcal{A}'_k$, $Q_{k+1} \in u\mathcal{A}'_{k+1}$ com $Q_{k+1} \subset Q_k$, temos $w(Q_k) \leq Kw(Q_{k+1})$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $w \in A_\infty(S^2)$, existem constantes $C_w > 0$ e $\delta > 0$ tais que, para toda bola $U(x,t)$ e todo $A \subset U(x,t)$ mensurável, temos

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sigma(A)}{\sigma(U(x,t))} \leq C_w\Big(\frac{w(A)}{w(U(x,t))}\Big)^\delta.$$

Sejam, então, $Q \in \mathcal{A}'_k$, $u \in SO(3)$ e $Q' = u(Q)$. Por I-2.11(b) (ver Observação 1.3), existem $x \in Q'$ e $1 - \sqrt{2} \leq t < 1$ tais que $Q' \subset U(x,t)$ e $\sigma(U(x,t)) \leq 4\pi^2\sigma(Q')$. Então, se $A \subset Q'$ é mensurável, temos, por (1):

$$\frac{\sigma(A)}{\sigma(Q')} \leq \frac{4\pi^2\sigma(A)}{\sigma(U(x,t))} \leq 4\pi^2 C_w\Big(\frac{w(A)}{w(U(x,t))}\Big)^\delta \leq 4\pi^2 C_w\Big(\frac{w(A)}{w(Q')}\Big)^\delta.$$

Fazendo $A = Q_{k+1} \in u\mathcal{A}'_{k+1}$, $Q' = Q_k \in u\mathcal{A}'_k$, com $Q_{k+1} \subset Q_k$, temos

$$\frac{\sigma(Q_{k+1})}{\sigma(Q_k)} \leq 4\pi^2 C_w\Big(\frac{w(Q_{k+1})}{w(Q_k)}\Big)^\delta.$$

Agora, por I-2.11(a), temos que $\sigma(Q_{k+1})/\sigma(Q_k) \geq 1/8$. Logo,

$$w(Q_k) \leq (32\pi^2 C_w)^{1/\delta} w(Q_{k+1}).$$

Fazendo $K = (32\pi^2 C_w)^{1/\delta}$, temos o lema demonstrado.

2.5. TEOREMA. Seja $1 < p < \infty$ e seja w um peso tal que $w^{1-p'} \in A_\infty(S^2)$, onde $p' = p/(p-1)$. Então, as seguintes condições são equivalentes:

(a) Existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda $f \in L^p_w(S^2)$,

$$\int_{\widetilde{S^2}} (\mathcal{M}f(x,r))^p d\mu(x,r) \leq C \int_{S^2} | f(x) |^p \, w(x) d\sigma(x).$$

(b) Existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda bola $U = U(z,t), 1-\sqrt{2} \leq t < 1$,

$$\int_{\widetilde{U}} (\mathcal{M}(w^{1-p'}\chi_U)(x,r))^p d\mu(x,r) \leq C \int_U w^{1-p'}(x) d\sigma(x) < \infty.$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração de (a) $\Rightarrow$ (b) é feita de maneira inteiramente análoga à demonstração de (a) $\Rightarrow$ (b) no Teorema 1.8.

(b) $\Rightarrow$ (a): Fixemos $u \in SO(3)$ e $Q \in \mathcal{A}$. Então, pelo Teorema I-2.11(b) (ver Observação 1.3), existem $z \in Q$ e $1-\sqrt{2} \leq t < 1$ tais que $Q \subset U(z,t)$ e $\sigma(U(z,t)) \leq 4\pi^2\sigma(Q)$. Denotemos $U = U(uz,t)$, $Q' = u(Q)$ e $\nu = w^{1-p'}$. Como $\nu \in A_\infty(S^2)$, temos

$$\frac{\sigma(Q')}{\sigma(U)} \leq C_\nu \left(\frac{\nu(Q')}{\nu(U)}\right)^\delta.$$

Então,

$$(1) \qquad \nu(U) \;\leq\; C_\nu^{1/\delta}\left(\frac{\sigma(U)}{\sigma(Q')}\right)^{1/\delta} \nu(Q') \;\leq\; (4\pi^2 C_\nu)^{1/\delta}\nu(Q').$$

Assim, pela hipótese, por 2.2(1) e por (1), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_{\widetilde{Q'}}(\mathcal{M}_d^u(w^{1-p'}\chi_{Q'})(x,r))^p d\mu(x,r) &\leq \int_{\widetilde{U}}(\mathcal{M}_d^u(w^{1-p'}\chi_U)(x,r))^p d\mu(x,r)\\
&\leq (16\pi^2)^p \int_{\widetilde{U}}(\mathcal{M}(w^{1-p'}\chi_U)(x,r))^p d\mu(x,r)\\
&\leq C(16\pi^2)^p \int_U w^{1-p'}(x)d\sigma(x)\\
&= C(16\pi^2)^p \nu(U)\\
&\leq C(16\pi^2)^p (4\pi^2 C_\nu)^{1/\delta}\nu(Q')\\
&= C_1 \int_{Q'} w^{1-p'}(x)d\sigma(x).
\end{aligned}
$$

onde $C_1 = C(16\pi^2)^p(4\pi^2 C_\nu)^{1/\delta}$. Como $w^{1-p'} \in A_\infty(S^2)$, pelo Lema 2.3 existe uma constante $K > 0$ tal que, se $u \in SO(3)$ e $Q_k \in u\mathcal{A}'_k$, $Q_{k+1} \subset Q_k$, temos $w^{1-p'}(Q_k) \leq Kw^{1-p'}(Q_{k+1})$. Portanto, como a constante C_1 na desigualdade acima depende somente de p, w e μ, pelo Teorema 1.8 e pela Observação 1.9, existe uma constante C_2 tal que

$$
(2) \qquad \int_{\widetilde{S^2}}(\mathcal{M}_d^u f(x,r))^p d\mu(x,r) \leq C_2 \int_{S^2} | f(x) |^p w(x)d\sigma(x)
$$

para toda $f \in L^p_w(S^2)$ e todo $u \in SO(3)$. Então, segue de 2.2(2), de (2), da desigualdade de Jensen e do Teorema de Fubini que

$$
\begin{aligned}
\int_{\widetilde{S^2}}(\mathcal{M}f(x,r))^p d\mu(x,r) &\leq \int_{\widetilde{S^2}}\Big(11\int_{SO(3)}\mathcal{M}_d^u f(x,r)du\Big)^p d\mu(x,r)\\
&\leq 11^p \int_{SO(3)}\int_{\widetilde{S^2}}(\mathcal{M}_d^u f(x,r))^p d\mu(x,r)du\\
&\leq 11^p C_2 \int_{S^2} | f(x) |^p w(x)d\sigma(x),
\end{aligned}
$$

o que demonstra o teorema.

2.6. OBSERVAÇÃO. Quando identificamos $\widetilde{S^2}$ com a bola $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R}^3 : | y |_3 \leq 1\}$ usando a aplicação $(y, r) \mapsto ry$, se denotarmos $U_r = U(\mathbb{1}, r)$, obteremos

$$\widetilde{U}_r = \{s\xi_2(\theta) : 0 \leq \theta_1 \leq \; arccos\; r(2-r),\; r \leq s \leq 1\},\ \text{se}\ 0 < r \leq 1$$

e

$$\widetilde{U}_r = \{s\xi_2(\theta) : 0 \leq \theta_1 \leq \; arccos\; r(2-r),\; 0 \leq s \leq 1\},\ \text{se}\ 1-\sqrt{2} \leq r \leq 0.$$

Então, $\widetilde{U}_r$ é um cone truncado se $0 < r < 1$, e um cone se $1-\sqrt{2} \leq r \leq 0$, contido na bola $\mathbb{B}$. Observamos que, se $x \in S^2$ e $U = U(x,r)$, então existe $u \in SO(3)$ tal que $u(\widetilde{U}_r) = \widetilde{U}$.

Agora, para $\ell = arccos \ \ r(2-r)$, definimos

$$\overline{U}_r = \{s\xi_2(\theta) : 0 \leq \theta_1 \leq \ell, \ 1-\ell \leq s \leq 1\}, \text{ se } 0 \leq \ell \leq 1$$

e

$$\overline{U}_r = \{s\xi_2(\theta) : 0 \leq \theta_1 \leq \ell, \ 0 \ \leq s \leq 1\}, \text{ se } 1 < \ell \leq \pi.$$

Se $1-\sqrt{2} \leq r \leq 0$, temos $\ell = arccos \ \ r(2-r) \geq \pi/2 > 1$ e, assim, $\widetilde{U}_r = \overline{U}_r$. Usando séries de potências, podemos mostrar que $cos\ell \geq 1-\ell^2/2$ e daí $r = 1-\sqrt{1-cos\ell} \geq 1-\ell$, para $0 \leq \ell \leq \pi/2$. Portanto, se $0 < r \leq 1$, temos $r \geq 1-\ell$ e, assim, $\widetilde{U}_r \subset \overline{U}_r$.

Vamos, agora, denotar por (b)' a condição (b) do Teorema 2.5 com $\overline{U}$ no lugar de $\widetilde{U}$. Como $\widetilde{U} \subset \overline{U}$, temos que (b)' implica (b). Por outro lado, (b) implica (a) e, pela desigualdade da condição (a) para $f = w^{1-p'}\chi_U$, temos

$$\int_{\widetilde{S^2}} (\mathcal{M}(w^{1-p'}\chi_U)(x,r))^p d\mu(x,r) \leq C \int_U w^{1-p'}(x) d\sigma(x).$$

Portanto, como o segundo membro da condição (b) é finito,

$$\int_{\overline{U}} (\mathcal{M}(w^{1-p'}\chi_U)(x,r))^p d\mu(x,r) \leq C \int_U w^{1-p'}(x) d\sigma(x) < \infty,$$

e assim obtemos (b)'. Logo, as condições (b) e (b)' são equivalentes.

2.7. OBSERVAÇÃO. Para $w(x) \equiv 1$, a condição (b) do Teorema 2.5 nos dá

(1) $$\int_{\widetilde{U}} (\mathcal{M}(\chi_U)(x,r))^p d\mu(x,r) \leq C\sigma(U),$$

para todas as bolas U. Fixemos $U = U(y,k)$, $\ 1-\sqrt{2} \leq k < 1$. Então,

(2) $$\frac{1}{176\pi^2} \ \leq \ \mathcal{M}(\chi_U)(x,r) \ \leq \ 1,$$

para todo $(x,r) \in \widetilde{U}$. De fato, a segunda desigualdade segue de

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\chi_U)(x,r) &= \sup_{1-\sqrt{2}\leq s\leq r} \frac{1}{\sigma(U(x,s))}\int_{U(x,s)} \chi_U(y)d\sigma(y) \\
&= \sup_{1-\sqrt{2}\leq s\leq r} \frac{\sigma(U(x,s)\cap U)}{\sigma(U(x,s))} \leq 1.
\end{aligned}$$

Para demonstrar a primeira desigualdade, lembremos que, por I-2.11(c) (ver Observação 1.3), existem $Q \in \mathcal{A}'$ e $u \in SO(3)$ tais que $U \subset u(Q)$ e $\sigma(u(Q)) \leq 11\sigma(U)$. Seja $(x,r) \in \widetilde{U}$. Então, $x \in U$ e $r \in [0,1]$ se $1-\sqrt{2} \leq k < 0$, e $r \in [k,1]$ se $0 \leq k \leq 1$. Daí, segue que $r \geq k$. Portanto, se α é a função definida em 1.4, temos que $\alpha(r) \leq \alpha(k)$. Logo, como $U \subset u(Q)$, temos $\sigma(u(Q)) \geq \sigma(U) = \alpha(k) \geq \alpha(r)$. Além disso, como $x \in U$, temos que $x \in u(Q)$. Dessa forma, procedendo exatamente como na demonstração do Lema 2.2(1) com $f = \chi_U$, utilizando 2.2(3), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{11} &= \frac{1}{11\sigma(U)}\int_U \chi_U(y)d\sigma(y) \\
&\leq \frac{1}{\sigma(u(Q))}\int_{u(Q)} \chi_U(y)d\sigma(y) \\
&\leq 16\pi^2\mathcal{M}\chi_U(x,r),
\end{aligned}$$

donde segue a primeira desigualdade de (2).

Agora, elevando ambos os membros da primeira desigualdade de (2) à potência p, e integrando sobre $\widetilde{U}$ com respeito à $d\mu$, obtemos

$$\left(\frac{1}{176\pi^2}\right)^p \mu(\widetilde{U}) \leq \int_{\widetilde{U}} (\mathcal{M}\chi_U)(x,r))^p d\mu(x,r).$$

Então, a condição (1) implica a condição

(3) $$\mu(\widetilde{U}) \leq K\sigma(U),$$

com $K = (176\pi^2)^p C$, para todas as bolas U. Mas, da condição (3) e da segunda desigualdade de (2), obtemos

$$\int_{\widetilde{U}} (\mathcal{M}(\chi_U)(x,r)))^p d\mu(x,r) \;\leq\; \mu(\widetilde{U}) \;\leq\; K\sigma(U).$$

Portanto, as condições (1) e (3) são equivalentes. A condição (3) é a versão da condição de Carleson para a esfera S^2. A condição de Carleson para S^1 foi dada por Carleson em [5].

3. A LIMITAÇÃO DA INTEGRAL DE POISSON

Em todos os resultados desta seção, vamos identificar $\widetilde{S^2} = S^2 \times [0,1]$ com a bola $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R}^3 : \mid y \mid_3 \leq 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ usando a aplicação $(y,r) \mapsto ry$, como foi observado em 2.6. Desta forma, temos $\mathcal{M}f(y) = \mathcal{M}f(y',r)$ para $y = ry' \in \mathbb{B}, y' \in S^2$ e $0 \leq r \leq 1$.

3.1. DEFINIÇÃO. Definimos o núcleo de Poisson para a esfera S^2 por

$$P_y(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - \mid y \mid_3^2}{\mid y - x \mid_3^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - r^2}{(1 - 2rx \cdot y' + r^2)^{3/2}},$$

onde $x, y' \in S^2$, $0 \leq r < 1$ e $y = ry'$. Se f é uma função real e integrável sobre S^2, definimos a integral de Poisson de f para $y \in \mathbb{R}^3$ e $\mid y \mid_3 < 1$ por

$$u_f(y) = \int_{S^2} P_y(x) f(x) d\sigma(x).$$

3.2. LEMA. Dados $y \in \mathbb{R}^3$ com $\mid y \mid_3 < 1$ e $v \in SO(3)$, temos

(1) $$u_{f \circ v}(v^{-1}y) = u_f(y)$$

e

(2) $$\mathcal{M}(f \circ v)(v^{-1}y) = \mathcal{M}f(y).$$

DEMONSTRAÇÃO. Dados $y \in \mathbb{R}^3$ com $\mid y \mid_3 < 1$ e $v \in SO(3)$, temos

$$\begin{aligned}
u_{f\circ v}(v^{-1}y) &= \int_{S^2} P_{v^{-1}y}(x)(f\circ v)(x)d\sigma(x)\\
&= \int_{v(S^2)} P_{v^{-1}y}(v^{-1}z)(f\circ v)(v^{-1}z)d\sigma(z)\\
&= \int_{S^2} \frac{1}{4\pi}\frac{1-\mid v^{-1}y\mid_3^2}{\mid v^{-1}y - v^{-1}z\mid_3^3} f(z)d\sigma(z)\\
&= \int_{S^2} \frac{1}{4\pi}\frac{1-\mid y\mid_3^2}{\mid y - z\mid_3^3} f(z)d\sigma(z)\\
&= \int_{S^2} P_y(z)f(z)d\sigma(z)\\
&= u_f(y),
\end{aligned}$$

o que demonstra (1). Para demonstrarmos (2), basta observarmos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma(U(v^{-1}y,s))}\int_{U(v^{-1}y,s)} \mid (f\circ v)(z)\mid d\sigma(z) &= \frac{1}{\sigma(U(y,s))}\int_{U(y,s)} \mid (f\circ v)(v^{-1}x)\mid d\sigma(x)\\
&= \frac{1}{\sigma(U(y,s))}\int_{U(y,s)} \mid f(x)\mid d\sigma(x).
\end{aligned}$$

3.3. TEOREMA. Para toda função real e integrável f e todo $y\in \mathbb{R}^3$ com $\mid y\mid_3 < 1$, temos

(1) $$\mid u_f(y)\mid \leq 4\mathcal{M}f(y).$$

DEMONSTRAÇÃO. Podemos assumir $y = r\mathbb{1}$, com $0\leq r<1$ e $\mathbb{1} = (1,0,0)$. De fato, suponhamos que (1) seja válido para toda função f real e integrável e todo $y = r\mathbb{1}, 0\leq r<1$. Então, dado $y\in\mathbb{R}^3$ com $\mid y\mid_3<1$, existem $v\in SO(3)$ e $0\leq r<1$ tais que $y = v(r\mathbb{1})$. Assim, pelo Lema 3.2,

$$\mid u_f(y)\mid = \mid u_{f\circ v}(v^{-1}y)\mid = \mid u_{f\circ v}(r\mathbb{1})\mid \leq 4\mathcal{M}(f\circ v)(r\mathbb{1}) = 4\mathcal{M}(f\circ v)(v^{-1}y) = 4\mathcal{M}f(y).$$

Seja, então, $y = r\mathbb{1}$, com $0\leq r<1$.

Fixemos as seguintes notações $\theta = (\theta_1,\theta_2), u(y) = u_f(y)$ e

$$p(\theta_1, r) = P_{r\mathbb{1}}(\xi_2(\theta)) = \frac{1}{4\pi}\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\theta_1 + r^2)^{3/2}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} u(r\mathbb{1}) &= \int_{S^2} P_{r\mathbb{1}}(x) f(x) d\sigma(x) \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta_1, r) f(\xi_2(\theta)) sen\theta_1 d\theta_2 d\theta_1. \end{aligned}$$

Se $m(r) = arccos \ \ r(2-r)$, então, integrando por partes com respeito a θ_1, obtemos

$$\begin{aligned} (2) \qquad I_r &= \left| \int_{S^2\setminus U(\mathbb{1},r)} P_{r\mathbb{1}}(x) f(x) d\sigma(x) \right| \\ &= \left| \int_{m(r)}^{\pi} p(\theta_1, r) sen\theta_1 \int_0^{2\pi} f(\xi_2(\theta_1,\theta_2)) d\theta_2 d\theta_1 \right| \\ &= \left| p(\pi, r) \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi_2(\theta_1,\theta_2)) sen\theta_1 d\theta_2 d\theta_1 \right. \\ &- p(m(r), r) \int_0^{m(r)}\int_0^{2\pi} f(\xi_2(\theta_1,\theta_2)) sen\theta_1 d\theta_2 d\theta_1 \\ &- \left. \int_{m(r)}^{\pi} \frac{\partial_p(\theta_1, r)}{\partial\theta_1}\Big(\int_0^{\theta_1}\int_0^{2\pi} f(\xi_2(t,\theta_2)) sent d\theta_2 dt\Big) d\theta_1 \right| \\ &\leq p(\pi, r) \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(\xi_2(\theta_1,\theta_2)) \mid sen\theta_1 d\theta_2 d\theta_1 \\ &+ p(m(r), r) \int_0^{m(r)}\int_0^{2\pi} \mid f(\xi_2(\theta_1,\theta_2)) \mid sen\theta_1 d\theta_2 d\theta_1 \\ &+ \int_{m(r)}^{\pi} \left|\frac{\partial_p(\theta_1, r)}{\partial\theta_1}\right| \Big(\int_0^{\theta_1}\int_0^{2\pi} \mid f(\xi_2(t,\theta_2)) \mid sent d\theta_2 dt\Big) d\theta_1 \\ &= I_r^1 + I_r^2 + I_r^3. \end{aligned}$$

Como $\sigma(S^2) = 4\pi$, temos

$$(3) \qquad I_r^1 = p(\pi, r) \int_{S^2} \mid f(x) \mid d\sigma(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1-r^2}{(1+2r+r^2)^{3/2}}\int_{S^2} \mid f(x) \mid d\sigma(x)\\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1-r}{(1+r)^2}\int_{S^2} \mid f(x) \mid d\sigma(x)\\
&\leq \mathcal{M}f(r\mathbb{1}).
\end{aligned}
$$

Lembrando que $\sigma(U(z,r)) = \sigma(B_2'(z,\sqrt{2}\mid 1-r \mid)) = 2\pi(1-r)^2$, temos

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad I_r^2 &= p(m(r),r)\int_{U(\mathbb{1},r)} \mid f(x) \mid d\sigma(x)\\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1-r^2}{(2r^3-3r^2+1)^{3/2}}\int_{U(\mathbb{1},r)} \mid f(x) \mid d\sigma(x)\\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{(1-r)(1+r)}{((1-r)^2(1+2r))^{3/2}}\int_{U(\mathbb{1},r)} \mid f(x) \mid d\sigma(x)\\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1+r}{(1-r)^2}\frac{1}{(1+2r)^{3/2}}\int_{U(\mathbb{1},r)} \mid f(x) \mid d\sigma(x)\\
&\leq \frac{1+r}{4\pi(1-r)^2}\int_{U(\mathbb{1},r)} \mid f(x) \mid d\sigma(x)\\
&\leq \frac{2}{2\sigma(U(\mathbb{1},r))}\int_{U(\mathbb{1},r)} \mid f(x) \mid d\sigma(x)\\
&\leq \mathcal{M}f(r\mathbb{1}).
\end{aligned}
$$

Pelo resultado 3 do Apêndice, como $0 \leq r < 1$, temos

$$\int_{S^2} P_{r\mathbb{1}}(x)d\sigma(x) = 2\pi\int_0^{\pi} p(\theta_1,r)sen\theta_1 d\theta_1 = 1.$$

Usando integração por partes e observando que $\dfrac{\partial p(\theta_1,r)}{\partial\theta_1} \leq 0$ se $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ e $0 \leq r < 1$, temos

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad \int_0^{\pi}\left|\frac{\partial p(\theta_1,r)}{\partial\theta_1}\right|\left(\int_0^{\theta_1} sent dt\right)d\theta_1 &= \int_0^{\pi} -\frac{\partial p(\theta_1,r)}{\partial\theta_1}(1-cos\theta_1)d\theta_1\\
&= \int_0^{\pi} p(\theta_1,r)sen\theta_1 d\theta_1 - 2p(\pi,r)\\
&= \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{(1+r)^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\Big(1 - \frac{1-r}{(1+r)^2}\Big) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}.
\end{aligned}
$$

Ainda, dado $0 \leq r < 1$, temos

$$\sigma(U(\mathbb{1}, r)) = 2\pi \int_0^{m(r)} sen\theta_1 d\theta_1. \tag{6}$$

Então, como $m(r) \leq \theta_1 \leq \pi$, por (5) e (6) vem que

$$
\begin{aligned}
I_r^3 &= \int_{m(r)}^{\pi} \Big|\frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial \theta_1}\Big| \Big(\int_0^{\theta_1}\int_0^{2\pi} \mid f(\xi_2(t, \theta_2) \mid sent d\theta_2 dt\Big) d\theta_1 \\
&= \int_{m(r)}^{\pi} \Big|\frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial \theta_1}\Big| \Big(\int_0^{\theta_1} sentdt\Big)\Big(\int_0^{\theta_1} sentdt\Big)^{-1}\Big(\int_0^{\theta_1}\int_0^{2\pi} \mid f(\xi_2(t, \theta_2)) \mid sentd\theta_2 dt\Big) d\theta_1 \\
&= 2\pi \int_{m(r)}^{\pi} \Big|\frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial \theta_1}\Big| \Big(\int_0^{\theta_1} sentdt\Big)\Big(\frac{1}{\sigma(U(\mathbb{1}, m^{-1}(\theta_1)))}\int_{U(\mathbb{1}, m^{-1}(\theta_1))} \mid f(x) \mid d\sigma(x)\Big) d\theta_1 \\
&\leq 2\pi \int_{m(r)}^{\pi} \Big|\frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial \theta_1}\Big| \Big(\int_0^{\theta_1} sentdt\Big) \mathcal{M}f(r\mathbb{1}) d\theta_1 \\
&\leq 2\pi \mathcal{M}f(r\mathbb{1}) \int_0^{\pi} \Big|\frac{\partial p(\theta_1, r)}{\partial \theta_1}\Big| \Big(\int_0^{\theta_1} sentdt\Big) d\theta_1 \\
&= \mathcal{M}f(r\mathbb{1}).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Então, de (2), (3), (4) e (7) segue que

$$J_r \;\leq\; I_r^1 + I_r^2 + I_r^3 \;\leq\; 3\mathcal{M}f(r\mathbb{1}).$$

Como $P_{r\mathbb{1}}(\xi_2(\theta)) = p(\theta_1, r) \leq p(0, r)$ para todo $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, temos

$$
\begin{aligned}
\mid u(r, \mathbb{1}) \mid &= \Big|\int_{S^2} P_{r\mathbb{1}}(x) f(x) d\sigma(x)\Big| \\
&\leq \Big|\int_{U(\mathbb{1}, r)} P_{r\mathbb{1}}(x) f(x) d\sigma(x)\Big| + \Big|\int_{S^2 \setminus U(\mathbb{1}, r)} P_{r\mathbb{1}}(x) f(x) d\sigma(x)\Big| \\
&\leq p(0, r) \int_{U(\mathbb{1}, r)} \mid f(x) \mid d\sigma(x) + I_r
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{4\pi}\frac{1+r}{(1-r)^2}\int_{U(\mathbb{1},r)} | f(x) | d\sigma(x) + 3\mathcal{M}f(r\mathbb{1}) \\
&\leq \frac{2}{4\pi}\frac{1}{(1-r)^2}\int_{U(\mathbb{1},r)} | f(x) | d\sigma(x) + 3\mathcal{M}f(r\mathbb{1}) \\
&= \frac{1}{\sigma(U(\mathbb{1},r))}\int_{U(\mathbb{1},r)} | f(x) | d\sigma(x) + 3\mathcal{M}f(r\mathbb{1}) \\
&\leq 4\mathcal{M}f(r\mathbb{1}),
\end{aligned}
$$

o que demonstra o teorema.

3.4. COROLÁRIO. Sejam w um peso sobre S^2 e $1 < p < \infty$. Se $w^{1-p'} \in A_\infty(S^2)$ e se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
(1) \qquad \int_{\widetilde{U}} (\mathcal{M}(w^{1-p'}\chi_U)(y))^p d\mu(y) \leq C \int_U w^{1-p'} d\sigma(x) < \infty
$$

para todo $U = U(z,t)$, $1 - \sqrt{2} \leq t < 1$, então existe uma constante $D > 0$ tal que, para todo $f \in L^p_w(S^2)$, temos

$$
(2) \qquad \int_{|y|_3 < 1} | u_f(y) |^p d\mu(y) \leq D \int_{S^2} | f(x) |^p w(x) d\sigma(x).
$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja w um peso sobre S^2, e seja $1 < p < \infty$ tal que $w^{1-p'} \in A_\infty(S^2)$. Suponhamos que w satisfaça a desigualdade (1). Então, pelo Teorema 2.5 existe uma constante $C' > 0$ tal que, para toda $f \in L^p_w(S^2)$, temos

$$
(3) \qquad \int_{|y|_3 < 1} (\mathcal{M}f(y))^p d\mu(y) \leq C' \int_{S^2} | f(x) |^p w(x) d\sigma(x).
$$

Então, pelo Teorema 3.3 e por (2), temos

$$
\begin{aligned}
\int_{|y|_3 < 1} | u_f(y) | d\mu(y) &\leq 4 \int_{|y|_3 < 1} \mathcal{M}f(x) d\mu(y) \\
&\leq 4C' \int_{S^2} | f(x) |^p w(x) d\sigma(x).
\end{aligned}
$$

Tomando $D = 4C'$, temos o resultado desejado.

3.5. TEOREMA. Seja f uma função real, não-negativa e integrável sobre S^2. Então, para todo $y = ry'$, onde $0 < r < 1$ e $y' \in S^2$, temos

$$(1) \qquad u_f(y) \geq \frac{1}{3^{3/2} \cdot 4\pi} \frac{1}{(1-r)^2} \int_{U(y,r)} f(x) d\sigma(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente observamos que, se $0 < r < 1$ e $(1-r)^2 \geq 1 - x \cdot y$, então $1 - 2rx \cdot y + r^2 \leq 3(1-r)^2$. De fato,

$$\begin{aligned} 1 - 2rx \cdot y + r^2 &= (1-r)^2 + 2r(1 - x \cdot y) \\ &\leq (1-r)^2 + 2r(1-r)^2 \\ &< 3(1-r)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_y(x) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1 - r^2}{(1 - 2rx \cdot y' + r^2)^{3/2}} \\ &> \frac{1}{4\pi} \frac{(1-r)(1+r)}{(3(1-r)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{3^{2/3} \cdot 4\pi} \frac{(1+r)}{(1-r)^2} \\ &> \frac{1}{3^{2/3} \cdot 4\pi} \frac{1}{(1-r)^2}. \end{aligned}$$

Assim, pela definição de $U(y.r)$ segue que

$$\begin{aligned} u_f(y) &= \int_{S^2} P_y(x) f(x) d\sigma(x) \\ &\geq \int_{U(y,r)} P_y(x) f(x) d\sigma(x) \\ &\geq \frac{1}{3^{2/3} \cdot 4\pi} \frac{1}{(1-r)^2} \int_{U(y,r)} f(x) d\sigma(x), \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema.

3.6. OBSERVAÇÃO. Seja $U = U(y,k) = B_2'(y, \sqrt{2} \mid 1-k \mid)$ e seja $1 - \sqrt{2} \leq s \leq 1$ tal que $U' = U(y,s) = B_2'(y, 2\sqrt{2} \mid 1-k \mid)$. Se $x = rx' \in \tilde{U}$, então $x' \in U$ e $r \geq k$ e assim temos que $U(x', r) \subset U'$. Tomando $f = \chi_{U'}$, pelo Teorema 3.5 temos

$$
\begin{aligned}
u_{\chi_{U'}}(x) &\geq \frac{1}{3^{2/3}\cdot 4\pi}\frac{1}{(1-r)^2}\sigma(U(x',r)\cap U') \\
&= \frac{1}{3^{2/3}\cdot 4\pi}\frac{1}{(1-r)^2}\sigma(U(x',r)).
\end{aligned}
$$

Agora, como $\sigma(U(x',r)) = \sigma(B_2'(x',\sqrt{2}\mid 1-r\mid)) = 2\pi(1-r)^2$, temos que

(1) $$u_{\chi_{U'}}(x) \geq \frac{1}{2\cdot 3^{3/2}},$$

para todo $x \in \tilde{U}$.

3.7. COROLÁRIO. Seja $0 < p < \infty$, e suponhamos que exista uma constante $D > 0$ tal que, para toda função não-negativa e integrável $f : S^2 \to I\!R$, temos

$$\int_{|y|_3<1} \mid u_f(y)\mid^p d\mu(y) \leq D\int_{S^2}(f(x))^p d\sigma(x).$$

Então, $\mu(\tilde{U}) \leq C\sigma(U)$, para todas as bolas $U = U(y,k)$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam U e U' como na Observação 3.6. Por 3.6(1) temos

$$\frac{1}{(2\cdot 3^{3/2})^p} \leq \mid u_{\chi_{U'}}(x)\mid^p,$$

para todo $x \in \tilde{U}$. Então, integrando ambos os membros da desigualdade acima sobre $\tilde{U}$ com respeito à medida μ e usando a hipótese, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2\cdot 3^{3/2})^p}\mu(\tilde{U}) &\leq \int_{\tilde{U}} \mid u_{\chi_{U'}}(x)\mid^p d\mu(x) \\
&\leq \int_{|x|_3<1} \mid u_{\chi_{U'}}(x)\mid^p d\mu(x) \\
&\leq D\int_{S^2}(\chi_{U'}(z))^p d\sigma(z) \\
&= D\sigma(U').
\end{aligned}
$$

Agora, como $\sigma(U') = 4\sigma(U)$, temos que

$$\mu(\widetilde{U}) \leq 4(2 \cdot 3^{3/2})^p D\sigma(U),$$

o que demonstra o corolário.

3.8. OBSERVAÇÃO. Os corolários 3.4 e 3.7 nos dizem que, se $w \equiv 1$, então o operador $f \mapsto u_f$ é limitado de $L^p(S^2)$ em $L^p(\mathbb{B}, \mu)$, para $1 < p < \infty$ se e somente se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\mu(\widetilde{U}) \leq C\sigma(U),$$

para todas as bolas $U = U(x, r)$.

APÊNDICE

1. TEOREMA. Sejam μ uma medida σ-finita sobre $\mathcal{B}_{S^2}$, $0 < p < \infty$ e $g : S^2 \to I\!R$ mensurável. Então,

$$\int_{S^2} | g(w) |^p \, dw = \int_0^\infty p t^{p-1} \mu(\{w : | g(w) | \geq t\}) dt.$$

DEMONSTRAÇÃO. (Ver Stein [18], pág. 4).

2. TEOREMA. (Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz) . Sejam μ uma medida σ-finita sobre $\mathcal{B}_{S^2}$, T um operador sublinear de $L^\infty(S^2, \mu)$ no conjunto das funções mensuráveis de S^2 em $I\!R$ e $1 \leq r < s \leq \infty$. Se T é do tipo fraco (r, r) e (s, s) com respeito a w, então T é do tipo (p, p) com respeito a $w, r < p < s$.

DEMONSTRAÇÃO. (Ver Stein-Weiss [19], pág. 184).

3. TEOREMA. (a) Se $y \in I\!R^3$ com $| y |_3 < 1$, então

$$\int_{S^2} P_y(x) d\sigma(x) = 1.$$

(b) Se f é uma função real e integrável sobre S^2, então a integral de Poisson de f é uma função harmônica sobre $I\!B = \{y \in S^2 : | y |_3 < 1\}$, isto é, se $y = (y_1, y_2, y_3) \in I\!B$, temos

$$\frac{\partial u_f}{\partial y_1}(y) + \frac{\partial u_f}{\partial y_2}(y) + \frac{\partial u_f}{\partial y_3}(y) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. (Ver Stein [18], pág. 60–62).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] B. BORDIN e S.A. TOZONI – An inequality for a vector valued extension of the Hardy-Littlewood maximal operator on the unit sphere S^n, Atas do 41º Seminário Brasileiro de Análise (SBA), 1995.

[2] B. BORDIN e S.A. TOZONI – Carleson measures and A_∞ weights on the unit sphere S^n, Atas do 44º Seminário Brasileiro de Análise (SBA), 1996.

[3] J. BORGAIN – Extension of a result of Benedek, Calderón and Panzone, Arkiv Mat. **22** (1984), 91–95.

[4] A.P. CALDERÓN – Inequalities for the maximal function relative to a metric, Studia Math. **57** (1976), 297–306.

[5] L. CARLESON – Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem, Annals of Math. **76** (1962), 547–559.

[6] R.R. COIFMAN e C. FEFFERMAN – Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math. **51** (1974), 241–250.

[7] C. FEFFERMAN e E.M. STEIN – Some maximal inequalities, Amer. J. Math. **93** (1971), 107–115.

[8] P. FERNANDEZ – *"Medida e Integração"*, Projeto Euclides, Ed. Edgar Blücher, Rio de Janeiro, 1976.

[9] G.B. FOLLAND – *"Real Analysis"*, John Wiley and Sons, 1984.

[10] J. GARCIA-CUERVA e J.L. RUBIO DE FRANCIA – *"Weighted Norm Inequalities and Related Topics"*, North-Holland Math. Stud., Vol. 116, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[11] A.M. GARSIA – *"Martingale Inequalities"*, Seminar Notes on Recent Progress, W.A. Benjamin, Inc. 1973.

[12] M.IZUMIZAWA e N. KAZAMAKI – Weighted norm inequalities for martingales, Tôhoku Math. J. **29** (1977), 115–124.

[13] B. MUCKENHOUPT – Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.

[14] J. NEVEU – *"Discrete Parameter Martingales"*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam. 1975.

[15] H.E. RAUCH – Harmonic and analytic functions of several variables and the maximal theorem of Hardy and Littlewood, Canad. J. Math. **8** (1956), 171–183.

[16] J. RUIZ e J.L. TORREA – A unified approach to Carleson measures and A_p weights II, Pacific J. Math. **120** (1985), 189–197.

[17] F. SCHIPP, W.R. WADE e P. SIMON – *"Walsh Series. An introduction to dyadic harmonic analysis"*, Adam Hilger, Budapest, 1990.

[18] E.M. STEIN – *"Singular Integrals and Diferentiability Properties of Functions"*, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1970.

[19] E.M. STEIN e G. WEISS – *"Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces"*, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1971.

[20] A. TORCHINSKY – *"Real-Variable Methods in Harmonic Analysis"*, Academic Press, Inc., Orlando, 1986.

[21] S.A. TOZONI – On some norm inequalities for the sharp maximal operator on the sphere S^n (preprint).

[22] S.A. TOZONI – Vector-valued extensions of operators on martingales, Journal of Math. Analysis and Applications **201** (1996), 128–151.